Les questions 1) et 2) de l'exercice 1 sont à rendre vendredi 24 Novembre

Exercice 1. Théorème de Cesaro et applications

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ on note $a_n = \dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes. Le but des questions 1) et 2) est de prouver le **théorème de Cesaro** qui affirme que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers l.
Dans un premier temps, si cela vous semble compliqué vous pouvez admettre le résultat de la première question et continuer la suite.

1) On suppose d'abord $l = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

   -a- Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_0$ on a $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   -b- Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_1$ on a: $\dfrac{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_{N_0}|}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   -c- Déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Traiter le cas $l \in \mathbb{R}$ en utilisant ce qui précède. [Il pourra être judicieux d'étudier $a_n - l$]

Dans la suite on donne quelques applications du théorème de Cesaro.

3) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la suite $(v_{n+1}-v_n)_n$ converge vers l. Montrer que la suite $\left(\dfrac{v_n}{n}\right)_n$ converge également vers l.

4) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right)_n$ converge vers l où $l > 0$. Montrer que $\left(\sqrt[n]{w_n}\right)_n$ converge également vers l. *On admet que résultat reste vrai si $l = 0$.*

5) **Application**: déterminer les limites éventuelles des suites de terme général:

   -a- $u_n = \sqrt[n]{n}$
   -b- $u_n = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$
   -c- $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Exercice 2 Soit u la suite définie par: $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$.

1) Montrer que la suite u est bien définie et à valeurs dans $[1, +\infty[$.

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ puis montrer que: $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant \dfrac{1}{2^{k+1}}$.

3) En déduire que la suite u est majorée par 2. Puis que la suite est convergente.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right)$ de deux façons, trouver une expression de u_n en fonction de n.

5) Montrer alors que la suite u est convergente et déterminer sa limite que l'on notera l.

6) Déterminer un équivalent simple de $u_n - l$.

Exercice 3. Facultatif

Soit u une suite de nombres réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+3}.$$

Démontrer que u est convergente si et seulement si u est majorée et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) = 0$.