Borne supérieure, borne inférieure

Exercice 1. ($*$) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est bornée.

1) Montrer que A est bornée.
2) Pourquoi $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$, $\inf B$ existent dans $\mathbb{R}$? Les comparer.
3) On suppose que $\sup A = \sup B$ et $\inf A = \inf B$. A-t-on nécessairement $A = B$?

Exercice 2. ($*$) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que A et B sont majorées.

1) Montrer que $A \cup B$ est majorée.
2) Exprimer $\sup A \cup B$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.

Exercice 3. ($\heartsuit$) Déterminer les bornes des ensembles suivants:

1) $A = \left\{ \left(4 + \dfrac{1}{n}\right) \,/\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$
2) $B = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \,/\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$
3) $C = \left\{ x + \dfrac{1}{x} \,/\, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$

Exercice 4. ($*$) Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On pose $M = \sup A$.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'éléments de A dans l'intervalle $[M - \varepsilon, M]$.

Partie entière

Exercice 5. ($\heartsuit$) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que si $x \leqslant y$ alors $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.
2) Montrer que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
3) Exprimer $\lfloor x + y \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$.
4) Calculer $\lfloor -x \rfloor$ en fonction $\lfloor x \rfloor$.
5) Montrer que si $x \geqslant 1$, $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor < \lfloor x \rfloor$.

Exercice 6. ($*$) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 7

1) ($*$)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x + 1 \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor$.
2) ($**$)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x\lfloor x \rfloor = x^2 - \lfloor 2x \rfloor^2$.

Exercice 8. ($**$) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que : $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 9. ($\heartsuit$) Montrer que la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique. Effectuer le tracé de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Exercice 10. ($*$) Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

2) En déduire une expression simple de $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

3) Calculer la limite de $S_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

Densité

Exercice 11. ($\heartsuit$) Montrer que $\{r^3 \;/\; r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12. ($*$) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B \subset \mathbb{R}$.
On suppose que A est dense dans B et B dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13. ($*$) Déterminer s'ils existent la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum, le minimum de l'ensemble $\{\cos n \;/\; n \in \mathbb{Q}\}$.