Limites

Exercice 1. ($\heartsuit$) Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$

Exercice 2

1) ($\heartsuit$)Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(\ln x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
2) ($*$)Montrer que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3. ($*$) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. Montrer que si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe alors f est constante.

Exercice 4. ($*$) On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$

1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Calculer la limite de f en 0_+.
3) Déterminer un équivalent de $f(x)$.

Exercice 5. ($*$) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ croissante.
On pose pour $x \in]a,b[$, $h(x) = \displaystyle\lim_{t\to x_+} f(t)$.

1) Montrer que h est bien défine sur $]a,b[$.
2) Montrer que h est croissante sur $]a,b[$.

Exercice 6. ($**$) Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$.
Pour $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f(kx)}{x}$. Montrer que u converge et calculer sa limite.

Exercice 7. ($*$) Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = f(2x) \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

Étude de continuité

Exercice 8. ($\heartsuit$) On pose $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f. Puis étudier la continuité de f.
2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité.

Exercice 9. ($\heartsuit$) Soit $x > 0$. On pose pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(t) = (\sin t)^x$.
Montrer que f est prolongeble par continuité en 0.

Exercice 10. ($\heartsuit$) Après avoir donné leur ensemble de définition, étudier la continuité des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \qquad g(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Exercice 11. ($*$) Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 12. ($**$) Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + \frac{1}{2} - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$.
Montrer que f est bijective (on pourra calculer $f \circ f$). Montrer que f n'est continue en aucun point.

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 13. ($\heartsuit$) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que f admet un point fixe, i.e. il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 14. ($\heartsuit$) Montrer que toute fonction polynômiale de degré impair admet au moins une racine réelle. On pourra commencer par le degré 3.

Exercice 15. ($\heartsuit$) Soient f et g deux applications continues d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur I et telles que $|f| = |g|$.

1) Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.
2) Le résultat est-il encore vrai si f ou g s'annule?

Exercice 16. ($*$) Un cycliste a parcouru exactement 30 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 15 km.
[On pourra introduire la fonction $d : x \mapsto d(x)$, où $d(x)$ est la distance parcourue après x h du départ et exprimer la distance parcourue en une demi-heure.]

Exercice 17. ($*$) Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeur est constante.

Image d'un segment

Exercice 18. ($\heartsuit$) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.

1) Montrer que f est bornée.
2) f atteint-elle ses bornes?

Exercice 19. ($*$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
Montrer que $m = \inf f$ existe et que m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème de la bijection monotone

Exercice 20

1) (♡)Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle que l'on note x_n.
2) (♡)Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire la convergence de la suite (x_n).
3) (∗)Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $x_n - \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^4}$.
4) (∗∗)Montrer que $x_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^7}$.

Exercice 21. (∗) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1) Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0,1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2) Étudier la monotonie de la suite u. En déduire la convergence.
3) Déterminer la limite de la suite.

Exercice 22. (∗) Déterminer suivant le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^{\lambda x} = x$.

Équation fonctionnelle

Exercice 23. (♡) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0 et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(3x) = f(x).$$

On raisonne par analyse-synthèse.

1) **Analyse**. Soit f une telle fonction.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   -a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\frac{x}{3^n}\right)$.
   -b- En déduire que $f(x) = f(0)$.
2) En déduire l'ensemble des fonctions cherchées.

Exercice 24. (∗) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continues en 1 et telle que

$$\forall x > 0,\ \ f(x^2) = f(x).$$

Exercice 25. (∗∗) On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = x$.

1) Montrer que f est injective. En déduire que f est strictement croissante.
2) En déduire que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Exercice 26. (∗) On se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x+y) = f(x) + f(y). \quad (E)$$

On raisonne par analyse-synthèse

1) **Analyse** Soit f une telle fonction.

-a- Préciser $f(0)$.

-b- Montrer que f est impaire.

-c- Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.

-d- Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.

-e- Déduire enfin que f est une fonction linéaire.

2) En déduire l'ensemble des fonctions cherchées.

3) En utilisant ce qui précède, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \;\; f(xy) = f(x) + f(y). \quad (F)$$

Équivalents

Exercice 27. ($\heartsuit$) Calculer les limites suivantes, en utilisant si besoin des équivalents:

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-5x+1}{(\ln x)^3+x^2-5}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x}{x^4-5x^2}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\tan(2x)}{x(\mathrm{e}^{2x}-1)}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos x}}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin(x\ln x)}{x}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

9) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(3x)}{1-2\sin x}$

11) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2(x))}{x-\frac{\pi}{2}}$

12) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right)$

13) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{3x^2+5x}$

14) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln^2(1+x)-\ln^2(x))$

15) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2x^2)}{3x^2+5x}$

16) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^x-1}{x^x-1}$

Ďivers

Exercice 28. ($**$)Autre démo du TVI
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$.
Prenons y compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer : $\exists c \in [a,b] \;/\; y = f(c)$.
On pourra poser l'ensemble $A = \{x \in [a,b] \;/\; f(x) \leqslant y\}$, montrer qu'il admet une borne supérieure puis utiliser la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Exercice 29. ($***$) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ surjective. Montrer que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ admet une infinité de solutions pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. ($***$) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ surjective.

1) -a- On suppose que $f(x+1)-f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

-b- En déduire que s'il existe $a > 0$ et $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+a)-f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{l}{a}$.

2) On suppose que pour tous $x > 0$ et $y > 0$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.
Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $xf(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.