Vous rédigerez l'un des deux exercices à rendre Mercredi 6 Décembre.
Vous pourrez travailler personnellement sur l'autre exercice.

Problème

Partie I - Etude de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln(n)$.

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{k}$ pour tout entier naturel $k \geqslant 2$.

2) Déterminer alors un équivalent de H_n puis la limite de H_n.

3) Étudier la monotonie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire la convergence de cette suite. On notera γ la limite (c'est la constante d'Euler).

4) **Une suite vue en cours**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
   On a vu en cours que cette suite converge (grâce au théormème de la limite monotone), l'objectif ici est d'en calculer la limite.
   -a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = H_{2n} - H_n$.
   -b- À l'aide de I-3), en déduire la limite de (b_n).

Partie II - Etude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$ où f est définie par $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

1) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin de prouver qu'elle converge et déterminer sa limite.

2) -a- Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+2}$.
   Puis montrer, par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   -b- Prouver: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k-1}} = 2 + u_{k-1}$.
   Puis: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 2 \leqslant \dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k-1}} \leqslant 2 + \dfrac{1}{k}$.
   -c- En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de n et de H_n.

3) Déterminer alors à l'aide de la partie I un équivalent de $\dfrac{1}{u_n}$ puis de u_n.

Exercice 1. Suite implicite Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution notée x_n dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

2) Calculer x_1, x_2.

3) Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]0, 1[$.

4) -a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser le signe, pour tout réel $x \in]0, 1[$, de la quantité $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

   -b- En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le signe de $f_n(x_{n+1})$, puis la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

   -c- Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note l sa limite.

5) -a- Montrer rigoureusement que la limite de $(x_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est nulle.

   -b- Donner la valeur de l.

6) On pose $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = l - x_n \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

   -a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{6} x_n^n$.

   -b- Montrer que la suite (S_n) converge et montrer que la limite appartient à $[0, \frac{1}{3}]$.