Exercice 1

1) Soit $\varepsilon > 0$ (fixé dans toute la question 1)).

   -a- Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, par définition de la limite, $\boxed{\text{il existe } N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que: } \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_0 \Rightarrow |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}}$.

   -b- Comme N_0 est fixé, $|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|$ est un réel fixé qui ne dépend pas de n. Or $\frac{1}{n} \to 0$, donc $\frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow \left| \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|}{n} - 0 \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Or $\frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|}{n} \geqslant 0$ donc:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}}.$$

   -c- On pose $N = \max(N_0, N_1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant N$, alors

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \right| \leqslant \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|}{n} \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &= \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|}{n} + \frac{|u_{N_0+1}| + \cdots + |u_n|}{n} \end{aligned}$$

   Or d'après 1)-b-, $\frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ car $n \geqslant N \geqslant N_1$.
   Puis, d'après 1)-a-, pour $k \geqslant N_0$, $|u_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{|u_{N_0+1}| + \cdots + |u_n|}{n} &\leqslant \underbrace{\frac{n - N_0}{n}}_{\leqslant 1} \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(car il y a } n - N_0 \text{ termes dans la somme)} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

   Au final: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow |a_n| \leqslant \varepsilon$ d'où $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0}$.

2) **On utilise le résultat précèdemmet démontré, c'est-à-dire qu'on ne refait pas une démonstration utilisant les ε.**
   Supposons $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - l$ et $b_n = \frac{v_1 + \cdots + v_n}{n}$. On applique 1), $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Or pour $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{(u_1 - l) + \cdots + (u_n - l)}{n} = \frac{u_1 + \cdots + u_n - nl}{n} = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - \frac{nl}{n} = a_n - l.$$

   Comme $b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\boxed{a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l}$.

3) La suite $(v_{n+1} - v_n)$ converge vers l, donc $(v_n - v_{n-1})$ converge vers l. Donc d'après le théorème de Cesaro, la moyenne arithmétique des n premiers termes $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1})$ admet pour limite l. Or, par téléscopage,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) = \frac{1}{n}(v_n - v_0).$$

Puis:

$$\frac{v_n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}(v_n - v_0)}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l} + \underbrace{\frac{v_0}{n}}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Finalement, $\boxed{\left(\frac{v_n}{n}\right) \text{ converge vers } l}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt[n]{w_n} = w_n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(w_n)} \ : \ (*).$$

Or par hypothèse, $\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right)$ converge vers l. Donc par composition de la limite de $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ par ln (continue sur $\mathbb{R}_+^*$), $(\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n))$ converge vers $\ln(l)$ $(l > 0)$ donc d'après 3), avec $v_n = \ln(w_n)$, $\left(\frac{\ln(w_n)}{n}\right)$ converge vers $\ln(l)$. Donc d'après $(*)$ et par composition de la limite par exponentielle (continue sur $\mathbb{R}$), $\boxed{(\sqrt[n]{w_n}) \text{ converge vers } \mathrm{e}^{\ln(l)} = l}$.

5) -a- On applique 4), avec $w_n = n$. Ici $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc $\boxed{\sqrt[n]{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

-b- On applique 4), avec $w_n = \binom{2n}{n}$. Ici, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4n}{n} = 4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4.$$

Donc $\boxed{\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4}$.

-c- On pose $v_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

Puis, on applique 4) avec $w_n = \frac{n!}{n^n}$. Ici, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Or

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}.$$

Or $\frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h\to0}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où, par composition de la limite par exponentielle (exp est continue sur $\mathbb{R}$), $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

Finalement $\frac{w_{n+1}}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Par conséquent, $\boxed{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}}$.

Exercice 2 Soit u la suite définie par: $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n \geqslant 1$".

- **Initialisation**. Pour $n = 0$, u_0 existe et $u_0 = 1 \geqslant 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors $u_n \geqslant 1$, donc $u_n^2 + \frac{1}{2^n} \geqslant 1 > 0$ donc $\sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$ existe

(radicande positif) et par croissance de la fonction racine $\sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \geqslant 1$. Donc u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geqslant 1$.

- **Conclusion.** $\boxed{\text{La suite } u \text{ est bien définie et à valeurs dans } [1, +\infty[}$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1}^2 - u_k^2 = u_k^2 + \dfrac{1}{2^k} - u_k^2$ donc $\boxed{u_{k+1}^2 - u_k^2 = \dfrac{1}{2^k}}$. Puis,

$$u_{k+1} - u_k = \frac{u_{k+1}^2 - u_k^2}{u_{k+1} + u_k} = \frac{1}{2^k} \frac{1}{u_{k+1} + u_k}.$$

Or d'après 1), $u_k \geqslant 1$ et $u_{k+1} \geqslant 1$ donc $u_k + u_{k+1} \geqslant 2$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{u_k + u_{k+1}} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant \dfrac{1}{2^{k+1}}}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme l'inégalité précédente pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

On reconnaît une somme téléscopique dans le membre de gauche et la somme des terme d'une suite géométrique de raison 2 dans le membre de droite,

$$u_n - u_0 \leqslant \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{donc} \quad u_n \leqslant 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 2.$$

Donc, $\boxed{\text{la suite } u \text{ est majorée par } 2}$.
Or d'après 2), u est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone $\boxed{u \text{ converge}}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'une part part télescopage, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = u_n^2 - u_0^2$.
D'autre part, d'après 2),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Donc: $u_n^2 = 1 + 2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. Or $u_n \geqslant 0$ (d'après 1)) donc: $\boxed{u_n = \sqrt{3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}}$.

5) $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par combinaison linéaire $3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 3$. Or $\sqrt{u} \underset{u \to 3}{\longrightarrow} \sqrt{3}$ donc par composition, $\boxed{\lim u_n = \sqrt{3}}$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n - \sqrt{3} &= \sqrt{3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} - \sqrt{3} = \sqrt{3}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} - 1\right) \\ &\sim \sqrt{3}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \quad \text{car} \begin{cases} \sqrt{1+u} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}u \\ -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\boxed{u_n - \sqrt{3} \sim -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

Exercice 3
Soit u une suite de nombres réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+3}.$$

On raisonne par double implication.
$\Rightarrow$: supposons u convergente. Alors u est bornée donc majorée.
Et si on note l la limite de u alors comme suite extraite : $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ et $u_{n+2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ donc par opération $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l - 2l + l = 0$.

$\Leftarrow$: supposons u majorée et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) = 0$.
L'hypothèse : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+3}$. permet de prouver que les trois suites (u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2}) sont croissantes.
En effet, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{3(n+1)} - u_{3n} = u_{3n+3} - u_{3n} \geqslant 0. \text{ Idem pour les deux autres suites.}$$

Comme u est majorée, alors ces trois suites sont aussi majorées et donc d'après le théorème de la limite monotone, elles convergent. Notons l_1, l_2 et l_3 les trois limites.
Puis on utilise l'hypothèse $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, pour calculer deux manières les limites suivantes (grâce à des suites extraites) :

$u_{3n+2} - 2u_{3n+1} + u_{3n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l_3 - 2l_2 + l_1$ $\quad$ $u_{3n+2} - 2u_{3n+1} + u_{3n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $\quad$ donc $\quad$ $l_3 - 2l_2 + l_1 = 0\ (*)$

$u_{3n+3} - 2u_{3n+2} + u_{3n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l_1 - 2l_3 + l_2$ $\quad$ $u_{3n+3} - 2u_{3n+2} + u_{3n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $\quad$ donc $\quad$ $l_1 - 2l_3 + l_2 = 0 (**)$

$u_{3n+4} - 2u_{3n+3} + u_{3n+2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l_2 - 2l_1 + l_3$ $\quad$ $u_{3n+4} - 2u_{3n+3} + u_{3n+2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $\quad$ donc $\quad$ $l_2 - 2l_1 + l_3 = 0 (***)$.

En faisant $(*) - (**)$, $l_3 - 2l_2 + l_1 - (l_1 - 2l_3 + l_2) = 0$ donc $3(l_3 - l_2) = 0$ donc $l_2 = l_3$.
En faisant $(*) - (***)$, $l_3 - 2l_2 + l_1 - (l_2 - 2l_1 + l_3) = 0$ donc $3(l_1 - l_2) = 0$ donc $l_1 = l_2$.
Donc $l_1 = l_2 = l_3$.

Par conséquent les trois suites (u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2}) convergent vers une même limite donc la suite (u_n) converge aussi vers cette limite (démonstration analogue à celle du théorème sur les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Conclusion : on a donc bien, $\boxed{u \text{ est convergente si et seulement si } u \text{ est majorée et } \lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) = 0.}$