Exercice 2. $(*)$ Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que A et B sont majorées.

1) Montrer que $A \cup B$ est majorée.
2) Exprimer $\sup A \cup B$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.

Correction -

1) Comme A et B sont majorées, posons M_A, M_B réels tels que :
$$\forall x \in A,\ x \leqslant M \qquad\qquad \forall x \in B,\ x \leqslant M_B.$$
Donc, pour $x \in A \cup B$, alors $x \leqslant M_A$ si $x \in A$ et $x \leqslant M_B$ si $x \in B$. Donc $x \leqslant \max(M_A, M_B)$.
Donc $A \cup B$ est majorée.
2) Comme $A \cup B$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ alors $\sup(A \cup B)$ existe.
En refaisant le raisonnement de 1) avec $M_A = \sup A$ et $M_B = \sup B$, on obtient que $\max(\sup A, \sup B)$ est UN majorant de $A \cup B$ donc est plus grand que le plus petit des majorants de $A \cup B$, donc $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$ $(*)$.
Puis comme $A \subset A \cup B$, alors tout majorant de $A \cup B$, majore A donc en particulier $\sup(A \sup B)$ est UN majorant de A, il découle que $\sup A \leqslant \sup(A \cup B)$. De même, $\sup B \leqslant \sup(A \cup B)$. On déduit que $\max(\sup A, \sup B) \leqslant \sup(A \cup B)$ $(**)$.
On déduit donc de $(*)$ et $(**)$ l'égalité $\boxed{\max(\sup A, \sup B) = \sup(A \cup B)}$.

Exercice 4. $(*)$ Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On pose $M = \sup A$ **et on suppose que M n'est pas le maximum de A** (oubli dans l'énoncé original)
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'éléments de A dans l'intervalle $[M - \varepsilon, M]$.

Correction - NB: le fait qu'il existe UN tel élément est la caractérisation de sup avec les ε. On va donc montrer qu'il en existe une infinité.
Notons que M n'étant pas le maximum de M alors $M \notin A$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $M - \varepsilon$ ne majore pas A, il existe $x_1 \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_1 < M$ (inégalité stricte à droite car $M \notin A$).
Comme x_1 ne majore pas A, il existe $x_2 \in A$ tel que $x_1 < x_2 < M$.
Etc...On itère ce procédé, on construit donc une suite (x_n) d'éléments de A strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M - \varepsilon \leqslant x_n < M$.
$\boxed{\text{Il existe donc bien une infinité d'éléments de } A \text{ dans l'intervalle } [M - \varepsilon, M]}$.

Exercice 6. $(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Correction - Méthode 1 : à l'aide de la caractérisation. On remarque d'ailleurs que cette égalité est la même que celle de la question 1) de l'exercice ..., en posant $a = \frac{x}{2}$. On a $\lfloor a \rfloor + \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2a \rfloor$ c'est-à-dire $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
Méthode 2 : en exploitant la périodicité. On pose $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor - \lfloor x \rfloor$. Il s'agit de prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
Un calcul rapide montre que $f(x+1) = f(x)$ donc f est 1-périodique, il suffit donc de montrer que f est nulle sur $[0, 1[$. Si $x \in [0, 1[$ alors $\frac{x}{2} \in [0, \frac{1}{2}[\subset [0, 1[$ et $\frac{x+1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1[\subset [0, 1[$ donc les trois parties entières sont nulles donc $f(x) = 0$.

Exercice 7

2) $(**)$Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) \quad x\lfloor x \rfloor = x^2 - \lfloor 2x \rfloor^2$.

Correction -

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $x = \lfloor x \rfloor + d$ où $d \in [0, 1[$
$$(E) \Leftrightarrow x(x - \lfloor x \rfloor) = \lfloor 2x \rfloor^2$$
$$\Leftrightarrow xd = \lfloor 2x \rfloor^2 \ (*)$$
Analyse : soit x solution de (E) comme d et $\lfloor 2x \rfloor^2$ sont positifs alors d'après $(*)$, $x \geqslant 0$.
0 est solution de (E). Puis si $x > 0$, comme $d < 1$, alors $xd \leqslant x$ c'est-à-dire d'après $(*)$, $\lfloor 2x \rfloor^2 \leqslant x$ $(**)$.
Par un calcul déjà vu $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ ou $\lfloor x \rfloor + 1$ selon que $d \leqslant \frac{1}{2}$ ou $d > \frac{1}{2}$. Puis $x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc l'inégalité $(**)$ devient
$$4\lfloor x \rfloor^2 < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{ou} \qquad 4\lfloor x \rfloor^2 + 4\lfloor x \rfloor + 1 < \lfloor x \rfloor + 1$$
et donc
$$4\lfloor x \rfloor^2 < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{ou} \qquad 4\lfloor x \rfloor^2 + 3\lfloor x \rfloor + 1 < 1$$
Comme $\lfloor x \rfloor$ est entier, positif (car $x \geqslant 0$), cette inégalité n'est possible que si $\lfloor x \rfloor = 0$ c'est-à-dire $x \in [0, 1[$.
Synthèse : soit $x \in [0, 1[$, alors $\lfloor x \rfloor = 0$, donc
$$(E)0 \Leftrightarrow x^2 - \lfloor 2x \rfloor^2 \Leftrightarrow x^2 = \lfloor 2x \rfloor^2.$$
Or $x^2 \in [0, 1[$ et $\lfloor 2x \rfloor^2$ est entier, l'égalité n'est donc possible que si $x = 0$.
Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E) \text{ est } \{0\}}$.

Exercice 8. $(**)$ Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que : $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Correction - Méthode 1. A l'aide de la caractérisation. Posons $x = \lfloor x \rfloor + d$ où $d \in [0,1[$. Alors $nx = n\lfloor x \rfloor + nd$ où $nd \in [0,n[$. Donc $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + nd \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor nd \rfloor$. Donc $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nd \rfloor}{n}$.
Comme $nd \in [0,n[$ alors $\lfloor nd \rfloor \in [0,n[$ et donc $\frac{\lfloor nd \rfloor}{n} \in [0,1[$.

On déduit donc $\boxed{\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}$.

Méthode 2. Une méthode astucieuse. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$. Il s'agit de prouver que f est nulle.
Un calcul rapide prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$ c'est-à-dire f est 1-périodique. Il suffit donc de prouver que $f(x) = 0$ pour $x \in [0,1[$. Or pour $x \in [0,1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$. Puis, $nx \in [0,n[$ donc $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in [0,1[$ et donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$. On a donc bien $f(x) = 0$.

Exercice 9. $(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.
2) En déduire une expression simple de $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.
3) Calculer la limite de $S_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction - Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) D'après la caractérisation de la partie entière, on pose: $x = \lfloor x \rfloor + d$ où $d \in [0,1[$.
Alors $x + \frac{1}{2} = \lfloor x \rfloor + \underbrace{d + \frac{1}{2}}_{\in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[}$ $(*)$ et $2x = 2\lfloor x \rfloor + \underbrace{2d}_{\in [0,2[}$ $(**)$.
Ce qui nous amène à distinguer les cas suivants.
   - Si $d \in [0, \frac{1}{2}[$, alors $d + \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1[\subset [0,1[$ et $2d \in [0,1[$, donc l'unicité des décompositions $(*)$, $(**)$ donne:
   $$\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor \qquad \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor \qquad \text{donc} \qquad \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$
   - Si $d \in [\frac{1}{2}, 1[$, alors $d + \frac{1}{2} \in [1, \frac{3}{2}[$ et $2d \in [1,2[$, donc les décompositions $(*)$, $(**)$ deviennent:
   $$x + \frac{1}{2} = \lfloor x \rfloor + 1 + \underbrace{d - \frac{1}{2}}_{\in [0, \frac{1}{2}[} \qquad 2x = 2\lfloor x \rfloor + 1 + \underbrace{2d - 1}_{\in [0,1[}.$$
   Donc l'unicité de la décomposition donne:
   $$\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{donc} \qquad \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

   Dans tous les cas, $\boxed{\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) \qquad (\lfloor u \rfloor + \lfloor u + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2u \rfloor) \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2^0} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor \end{aligned}$$
$$\boxed{S_n(x) = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor}.$$
3) Tout d'abord, pour $x = 0$, $S_n(0) = \lfloor 0 \rfloor - \lfloor 0 \rfloor = 0$.
Puis $\frac{x}{2^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0_+ & \text{si } x > 0 \\ 0_- & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Or $\lfloor u \rceil \underset{u \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} -1 & \text{si } u \to 0_- \\ 0 & \text{si } u \to 0_+ \end{cases}$. Donc par composition des limites:
$$\left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Et donc par différence, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor - 1 & \text{si } x < 0 \\ \lfloor x \rfloor & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$.

Exercice 10. ($\heartsuit$) Montrer que $A = \{r^3 \ / \ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction - Soit $(a, b) \in R^2$ tel que $a < b$. Comme Q est dense dans $\mathbb{R}$, on peut poser $r \in Q\mathbb{B}$ tel que $\sqrt[3]{a} < r < \sqrt[3]{a}$. Comme $t \mapsto t^3$ est strictement croissante alors $a < r^3 < b$. Donc $]a, b[\cap A \neq \emptyset$ donc $\boxed{A \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$.

Exercice 11. ($*$) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B \subset \mathbb{R}$.
On suppose que A est dense dans B et B dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction - Soit $(a, b) \in R^2$ tel que $a < b$. Comme B est dense dans $\mathbb{R}$, on peut poser $\alpha\mathbb{B}$ tel que $a < \alpha < b$. Puis de nouveau B dense dans $\mathbb{R}$, posons $\beta \in B$ tel que $\alpha < \beta < b$.
Enfin comme A est dense dans B, posons $\gamma \in A$ tel $\alpha < \gamma < \beta$. Finalement $a < \gamma < b$. Donc $]a, b[\cap A \neq \emptyset$ et donc $\boxed{A \text{ dense dans } \mathbb{R}}$.

Exercice 12. ($*$) Déterminer s'ils existent la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum, le minimum de l'ensemble $A = \{\cos n \ / \ n \in \mathbb{Q}\}$.

Correction - $\boxed{\max A = \sup A = 1}$ en effet A est majoré par 1 et $1 \in A$ ($1 = \cos 0$).
$\inf A = -1$. Tout d'abord -1 est un minorant de A. Puis, posons (r_n) une suite de rationnels telle que $r_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi$ alors $\cos(r_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \cos \pi = -1$. Donc $(\cos(r_n)$ est une suite de A qui tend vers -1. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\boxed{\inf A = -1}$.
$\boxed{A \text{ n'admet pas de minimum}}$. Par l'absurde, si A admet un minimum alors il est la borne inférieure -1. Or $-1 \notin A$ car $\pi + 2k\pi$ n'est pas rationnel.