

Exercice 2. (**) En utilisant $\cos(n+2) + \cos n$ et $\cos(2n)$ montrer que la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Correction - Par l'absurde, supposons que $(\cos(n))$ converge, notons l la limite.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(n+2) + \cos(n) = 2 \cos\left(\frac{n+2+n}{2}\right) \cos\left(\frac{n+2-n}{2}\right) = 2 \cos(n+1) \cos(1). \quad (*)$$

Comme suite extraite, $\cos(n+2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $\cos(n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ donc par passage à la limite de $(*)$, $2l = 2 \cos(1)l$ donc $2l(1 - \cos 1) = 0$ donc $l = 0$ car $\cos 1 \neq 1$.

Puis $\cos(2n) = 2 \cos^2 n - 1$, que l'on passe à la limite $l = 2l^2 - 1$ donc $0 = -1$ (car $l = 0$), absurde.

Donc, la suite $(\cos(n))$ diverge.

Exercice 4. (*) Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que les suites (u_{2n}) , (u_{3n}) , (u_{2n+1}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

Correction - Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que les suites (u_{2n}) , (u_{3n}) , (u_{2n+1}) convergent, notons l , l' et l'' les limites respectives. (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{2n}) , (u_{3n}) donc admet pour limite l et l' , par unicité $l = l'$.

(u_{6n+3}) est une suite extraite de (u_{2n+1}) , (u_{3n}) donc admet pour limite l' et l'' , par unicité $l' = l''$.

Donc $l = l' = l''$, d'où (u_{2n}) , (u_{2n+1}) convergent vers $l \in \mathbb{R}$ donc la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. (**) Soit u une suite réelle monotone. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$. Montrer que v est monotone.

Correction - Supposons u croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n+1} u_{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n+1} u_{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n u_k \quad (*)$$

Comme u est croissante alors pour tout $1 \leq k \leq n$, $u_k \leq u_{n+1}$ donc en sommant

$$\sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n u_{n+1} = n u_{n+1} \quad \text{donc} \quad - \sum_{k=1}^n u_k \geq -n u_{n+1}.$$

Par conséquent, en revenant à $(*)$,

$$v_{n+1} - v_n \geq \frac{1}{n+1} u_{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \times n u_{n+1} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) u_{n+1} = 0.$$

Donc v est croissante.

Si u est décroissante, alors $-u$ est croissante et donc en posant $w_n = \frac{-u_1 - \dots - u_n}{n}$ d'après le cas croissant, il découle w croissante.

Enfin, comme $v = -w$ alors v est décroissante.

On a donc bien prouvé que, si u est monotone alors v est monotone.

Exercice 15. (♡) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1) Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$. Simplifier S_n et déduire que $S_n \sim u_n$.

Correction - Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1) On pose $f(x) = x + \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ donc $]0, +\infty[$ est stable par f . De plus $u_0 \in]0, +\infty[$ donc la suite u est définie et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$. Donc (u_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) admet une limite

finie ou $+\infty$.

Supposons que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$. Alors en passant à la limite la relation de récurrence, $l = l + \frac{1}{l}$ i.e. $\frac{1}{l} = 0$ ce qui est absurde.

Donc $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 \quad (\text{par télescopage}) \quad \text{d'où} \quad \boxed{S_n = u_n + \frac{1}{u_n} - u_0}.$$

On déduit $\frac{S_n}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n^2} - \frac{u_0}{u_n}$. Or $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc par opérations, $\frac{S_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\boxed{S_n \sim u_n}$.

Exercice 16. (*) Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

- 1) Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$. On dressera le tableau de variations.
- 2) Faire un dessin pour représenter les termes de la suite.
- 3) Montrer que les intervalles $]0, 2]$ et $[2, +\infty[$ sont stables par $f \circ f$.
- 4) Montrer alors que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont bien définies et respectivement à valeurs dans $]0, 2]$ et $[2, +\infty[$.
- 5) Étudier la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) . Déterminer alors leur nature et leur limite.
- 6) Dédurre alors la nature de la suite u .

Correction -

1) f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (par stricte décroissance de la fonction inverse puis multiplication par $\frac{1}{2} > 0$ et ajout de 1).

2) Graphe.

3) Comme f est décroissante sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ alors $f \circ f$ est croissante sur $]0, +\infty[$.
Donc, $f \circ f(]0, 2]) =]\lim_0 f \circ f, f \circ f(2)[$ et $f \circ f(]2, +\infty[) =]f \circ f(2), \lim_{+\infty} f \circ f[$.

Or $\lim_0 f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 0$ donc $\lim_0 f \circ f = 0$. De même, $\lim_{+\infty} f \circ f = +\infty$.

Donc $f \circ f(]0, 2]) =]0, 2]$ et $f \circ f(]2, +\infty[) =]2, +\infty[$. Donc $\boxed{]0, 2]$ et $[2, +\infty[$ sont stables par $f \circ f$.

4) Notons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n}) \quad u_{2n+3} = (f \circ f)(u_{2n+1}).$$

Si on note $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, cela revient à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = g(v_n) \quad w_{n+1} = g(w_n) \quad \text{où } g = f \circ f.$$

La stabilité des intervalles prouvée en 3) et le fait que $u_0 = 1 \in]0, 2]$ et $u_1 = 3 \in [2, +\infty[$ prouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n} \in]0, 2] \quad w_n = u_{2n+1} \in [2, +\infty[.$$

5) Comme g est croissante donc les suites (v_n) et (w_n) sont monotones.

Or $v_0 = u_0 = 1$ et $v_1 = u_2 = \frac{5}{3} > u_0$ donc $(v_n) = (u_{2n})$ est croissante.

Or $w_0 = u_1 = 3$ et $w_1 = u_3 = \frac{8}{5} < u_0$ donc $(w_n) = (u_{2n+1})$ est décroissante.

De plus d'après 4), (v_n) est majorée par 2 et (w_n) est minorée par 2. Donc d'après le théorème de la limite monotone (v_n) et (w_n) convergent respectivement vers un point fixe de g . Posons $l > 0$,

$$l = (f \circ f)(l) \quad \text{càd} \quad l = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{l}} \quad \text{càd} \quad l = 1 + \frac{2l}{2+l} \quad \text{càd} \quad 2l+l^2 = 2+3l \quad \text{càd} \quad (l-2)(l+1) = 0 \quad \text{càd} \quad l = 2 \text{ ou } l = -1.$$

On exclut, $l = -1$, car les suites (v_n) et (w_n) sont positives donc par passage à la limite $l \geq 0$.

On a donc prouvé que $\boxed{(u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \text{ convergent vers } 2}$...

6) ...et donc d'après un théorème du cours, $\boxed{u \text{ converge vers } 2}$.

Exercice 18. (*)

1) Soit $q \in [0, 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit (u_n) une suite réelle positive vérifiant: $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq qu_n$.

-a- Déterminer une majoration de u_n par un majorant dépendant de u_{n_0} , q et n . On pourra commencer par le cas où $n_0 = 0$.

-b- Montrer que (u_n) converge de limite nulle.

2) Soit $q > 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit (u_n) une suite réelle positive vérifiant: $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq qu_n$.
Montrer que (u_n) admet pour limite $+\infty$.

3) **Application.** A l'aide de ce qui précède, montrer que la suite (v_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2^n}{n!}$ est de limite nulle.

Correction -

1) On suppose $l < 1$. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $l < q < 1$ ($q = \frac{1+l}{2}$ convient).

-a- Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ et $l < q$, alors d'après un résultat du cours: il existe un rang n_0 à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$.

-b- D'après 1)-a-, $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq qu_n$. On montre donc par récurrence [laissée au lecteur] que:

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Or $0 < q < 1$ donc $q^{n-n_0} = q^n q^{-n_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2) On suppose $l > 1$. De manière analogue, on introduit $q \in \mathbb{R}$, tel que $l > q > 1$ et on montre qu' il existe un rang n_1 à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} > q$,
puis que

$$\forall n \geq n_1, \quad u_n \geq u_{n_1} q^{n-n_1}.$$

Or $q > 1$ donc $q^{n-n_1} = q^n q^{-n_1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3) Application: soit $z \in \mathbb{C}$. Posons pour $n \in \mathbb{N}, a_n = \left(\frac{z^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u_n = |a_n|$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| \left| \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc d'après 1), $u_n \rightarrow 0$ c'est-à-dire $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4) Le cas $l = 1$.

Pour l'exemple de suite qui admet pour limite 0, prendre $u_n = \frac{1}{n}$.

Pour l'exemple de suite qui admet pour limite 1, prendre $u_n = 1$.

Pour l'exemple de suite qui admet pour limite $+\infty$, prendre $u_n = n$.

Exercice 19. ()** On définit la suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

On note $\rho = |z_0|$ et θ un argument de z_0 . Montrer que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on exprimera en fonction de ρ et θ .

Indication : on pourra utiliser, après l'avoir prouvé que $\sin \frac{\theta}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{1}{2^n} \sin \theta$.

Correction - On cherche une expression de z_n . On calcule quelque terme pour tenter de conjecturer le terme général.

$z_0 = \rho e^{i\theta}$ ainsi $|z_0| = \rho$ et un argument de z_0 est θ .

$$z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{2} = \rho \frac{e^{i\theta} + 1}{2} = \rho \frac{1}{2} \times 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} = \rho \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Et donc par analogie:

$$z_2 = \rho \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) e^{i\frac{\theta}{4}} \dots$$

On conjecture alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \rho \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) e^{i\frac{\theta}{2^n}} = \rho \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) e^{i\frac{\theta}{2^n}}.$$

La récurrence est laissée au lecteur.

Reste à simplifier : $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$. On utilise la formule $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$ avec $a = \frac{\theta}{2^k}$ donnant :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right), \text{ et donc } \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}, \text{ et donc :}$$

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\theta}{2^n}}.$$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \frac{\rho \sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} e^{\frac{i\theta}{2^n}}$.

Puis on calcule la limite. $\frac{\theta}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $e^{\frac{i\theta}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{0i} = 1$ et $\sin \frac{\theta}{2^n} \underset{0}{\sim} \frac{\theta}{2^n}$ donc $2^n \sin \frac{\theta}{2^n} \underset{0}{\sim} \theta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta$. Et donc par opérations sur les limites, $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\rho \sin \theta}{\theta}$.

Exercice 21 Déterminer le terme général des suites réelles suivantes:

$$3 \ (*) \begin{cases} \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} \\ u_0 = 1, u_1 = 1 \end{cases}$$

Correction - On montre tout d'abord par récurrence double que la suite u est définie et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

Ce qui permet de définir : $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La suite v vérifie la relation de récurrence double linéaire : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ et $v_0 = v_1 = 1$.

Par la méthode classique (à rédiger), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Or $u_n = \frac{1}{v_n}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{5}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}$$

Exercice 22. (*) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = nx + \ln(x)$. On considère l'équation:

$$(E_n) \quad nx + \ln(x) = 0.$$

- 1) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur \mathbb{R}_+^* , notée x_n .
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

Correction -

- 1) *Question classique*: grâce au théorème de la bijection monotone, on montre que la fonction f_n réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $] \lim_{x \rightarrow 0} f, \lim_{x \rightarrow +\infty} f[=]-\infty, +\infty[$. Donc 0 admet un unique antécédent, noté x_n par f_n .
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) &= nx_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = (n+1)x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) - x_{n+1} \\ &= \underbrace{f_{n+1}(x_{n+1})}_{=0} - \underbrace{x_{n+1}}_{>0} \end{aligned}$$

$$f_n(x_{n+1}) < 0$$

Donc $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$ on applique alors f_n^{-1} qui est strictement croissante sur \mathbb{R} donc $x_{n+1} < x_n$.

Donc la suite (x_n) est strictement décroissante.

- 3) D'après 1) et 2); la suite (x_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de la bijection monotone, (x_n) est convergente. Notons l la limite. En passant à la limite l'inégalité: $x_n > 0$ on obtient $l \geq 0$. Par l'absurde supposons que $l > 0$. On passe à la limite la relation: $nx_n + \ln(x_n) = 0$, on obtient par opérations sur les limites: $+\infty = 0$, ce qui est absurde. Donc $l = 0$. Donc (x_n) converge vers 0.

Exercice 25. (♡) Déterminer un équivalent simple des suites de terme général:

$$1) u_n = 3^n - (\ln n)^4 + n^7 - 4n^3 + 1$$

$$4) u_n = n^2 \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right)$$

$$6) u_n = \sin \frac{3}{n^2} + \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$2) u_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{n^2}}$$

$$5) u_n = \sin \frac{1}{n} + \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$7) \frac{n^3 + 3n - \ln n}{n^2 + 3(\ln n)^3} \left(\sin \frac{1}{n} + e^{-n} \right)$$

$$3) u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$$

Correction -

$$1) u_n = 3^n - (\ln n)^4 + n^7 - 4n^3 + 1 \underset{+\infty}{\sim} 3^n \text{ (les autres termes sont négligeables devant } 3^n \text{).}$$

$$2) u_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{n^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \text{ (on a utilisé les équivalents usuel } \sin u \underset{0}{\sim} u \text{ et } \tan u \underset{0}{\sim} u \text{ et le fait que } \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{).}$$

$$3) u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} \text{ car } e^u - 1 \underset{0}{\sim} u \text{ et } \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$4) u_n = n^2 \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right) = n^2 \ln \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) \underset{+\infty}{\sim} n^2 \times \left(-\frac{1}{n+2} \right) \underset{+\infty}{\sim} -n$$

$$5) u_n = \sin \frac{1}{n} + \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ car } \sin \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ et } \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \text{ et } \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$6) u_n = \sin \frac{3}{n^2} + \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}.$$

$$7) u_n = \frac{n^3 + 3n - \ln n}{n^2 + 3(\ln n)^3} \left(\sin \frac{1}{n} + e^{-n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^2} e^{-n} = n e^{-n}. \text{ On a utilisé que } \sin \frac{1}{n} + e^{-n} \underset{+\infty}{\sim} e^{-n} \text{ (l'autre terme équivalent à } \frac{1}{n} \text{ est négligeable devant } e^{-n} \text{).}$$

Exercice 26. ()** Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^n k!$ est équivalent à $n!$. Puis déterminer un équivalent de $\frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^n k! \right) - 1$.

Correction - Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-2} k! + (n-1)! + n! \quad \text{donc} \quad \frac{u_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1.$$

On encadre la somme. Pour $1 \leq k \leq n-2$, alors $0 \leq k! \leq (n-2)!$ donc $0 \leq \frac{k!}{n!} \leq \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$.

On somme, on obtient

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Par théorème des gendarmes, il vient : $\sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc par opérations $\frac{u_n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} n!}$.

Puis,

$$\frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^n k! \right) - 1 = \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^n k! - n! \right) = \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k! \right) = \frac{u_{n-1}}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Exercice 27. (*) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives.

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) **différente de 1** et que $u_n \sim v_n$.

1) Montrer que $\ln u_n \sim \ln v_n$.

2) Montrer que le résultat n'est plus vraie si la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vaut 1.

Correction - Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives.

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) **différente de 1** et que $u_n \sim v_n$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln u_n}{\ln v_n} = \frac{\ln v_n + \ln \left(\frac{u_n}{v_n} \right)}{\ln v_n} = 1 + \frac{\ln \left(\frac{u_n}{v_n} \right)}{\ln v_n}.$$

Or $u_n \sim v_n$ donc $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ donc $\ln \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puis v_n admet la même limite que u_n car $u_n \sim v_n$ (différente de 1), donc

$\ln v_n$ admet pour limite $-\infty, l \in \mathbb{R}_* \text{ ou } +\infty$, dans tous les cas par opérations sur les limites, $\frac{\ln \frac{u_n}{v_n}}{\ln v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\boxed{\ln u_n \sim \ln v_n}$.

2) Posons $u_n = e^{\frac{1}{n}}$ et $v_n = e^{\frac{2}{n}}$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $u_n \sim v_n$. Or $\ln u_n = \frac{1}{n}$ et $\ln v_n = \frac{2}{n}$ donc $\boxed{\ln u_n \text{ n'est pas équivalent à } \ln v_n}$.