

I Régime sinusoïdal forcé

1 Régime transitoire / régime permanent

Un système linéaire est un système qui peut être décrit par des équations différentielles linéaires. Une variable $s(t)$ d'un système linéaire soumis à une excitation extérieure $e(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k s}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k e}{dt^k} \quad (1)$$

Les solutions de ce type d'équation différentielle, sont la somme d'une solution $s_h(t)$ de l'équation homogène,

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k s}{dt^k} = 0$$

et d'une solution particulière $s_p(t)$ de l'équation (1), soit

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t)$$

Pour un système physique, les **phénomènes dissipatifs** (frottements, effet Joule) font que $\lim_{t \rightarrow +\infty} s_h(t) = 0$.

La durée du **régime transitoire** est de l'ordre du temps caractéristique τ du système. Ainsi, au bout d'un temps $t \gg \tau$, le système atteint un **régime permanent** pour lequel :

$$s(t) = s_p(t)$$

- Pour une excitation constante $e(t) = E$, on peut chercher une solution particulière constante. Le régime permanent est alors un **régime stationnaire**.
- Pour une excitation sinusoïdale de la forme $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e)$, on peut chercher une solution particulière sinusoïdale de même pulsation : $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi_s)$. Le régime permanent est alors un **régime sinusoïdal forcé**.

2 Recherche d'une solution particulière sinusoïdale

On cherche une solution particulière de l'équation différentielle (1), pour une excitation sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e)$, de la forme $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi_s)$.

Pour ce faire, à tout signal $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi_x)$, on associe sa **représentation complexe** $\underline{x}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi_x)}$, où j est l'unité imaginaire ($j^2 = -1$).

On note $\underline{X} = X e^{j\varphi_x}$, l'**amplitude complexe** de x , de sorte que $\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$.

Le signal $x(t)$ se déduit de $\underline{x}(t)$ par $\left\{ \begin{array}{l} X = |\underline{X}| = |\underline{x}(t)| \\ \varphi_x = \arg(\underline{X}) \end{array} \right.$, ou par $x(t) = \text{Re}[\underline{x}(t)]$

Dérivation : $\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x}$

Comme $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[\text{Re}(\underline{x})] = \text{Re}(\frac{d\underline{x}}{dt})$, le signal $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi_s)$ est solution de l'équation différentielle (1), si et seulement si $\underline{s}(t)$ est solution de l'équation différentielle complexe associée :

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k \underline{s}}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k \underline{e}}{dt^k}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k \underline{s}(t) = \sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k \underline{e}(t), \text{ soit } \underline{s}(t) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k} \underline{e}(t) \text{ ou } \underline{S} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k} \underline{E}$$

II Impédances complexes

Pour un circuit linéaire en régime sinusoïdal, toutes les tensions et intensités sont des fonctions sinusoïdales de même pulsation ω . Dès lors, on peut utiliser les lois de Kirchhoff (loi des mailles, loi des nœuds) et les lois de comportements des dipôles en remplaçant les variables électriques par leurs représentations complexes. La loi de comportement, **en convention récepteur**, d'un dipôle linéaire passif se réécrit alors

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}i(t), \text{ ou directement } \underline{U} = \underline{Z}I \text{ (loi d'Ohm généralisée)}$$

où \underline{Z} est une grandeur complexe, homogène à une résistance, appelée **impédance** du dipôle.

L'**admittance** d'un dipôle est $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$.

1 Résistance

$\underline{u} = R\underline{i}$, donc l'impédance d'une résistance est $\underline{Z}_R = R$

2 Condensateur

$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega\underline{u}$, donc l'impédance d'un condensateur est $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

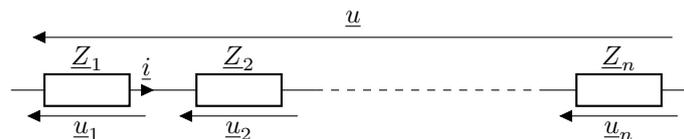
- A basse fréquence $\omega \rightarrow 0$, $\frac{1}{\underline{Z}_C} \rightarrow 0$ donc $\underline{i} \rightarrow 0$: un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
- A haute fréquence $\omega \rightarrow +\infty$, $\underline{Z}_C \rightarrow 0$ donc $\underline{u} \rightarrow 0$: un condensateur se comporte comme un fil.

3 Bobine

$\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\underline{i}$, donc l'impédance d'une bobine est $\underline{Z}_L = jL\omega$

- A basse fréquence $\omega \rightarrow 0$, $\underline{Z}_L \rightarrow 0$ donc $\underline{u} \rightarrow 0$: une bobine se comporte comme un fil.
- A haute fréquence $\omega \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{\underline{Z}_L} \rightarrow 0$ donc $\underline{i} \rightarrow 0$: une bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

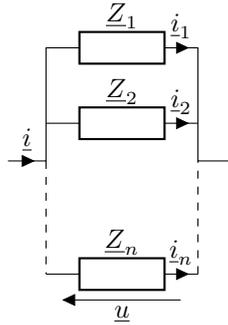
4 Association série



Impédance équivalente : $\underline{u} = \sum_{k=1}^n \underline{u}_k = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \underline{i}$ donc $\underline{Z}_{\text{éq}} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$

Diviseur de tension : $\underline{u}_k = \underline{Z}_k \underline{i}$ et $\underline{u} = \underline{Z}_{\text{éq}} \underline{i}$, donc $\underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_{j=1}^n \underline{Z}_j} \underline{u}$

5 Association parallèle



Impédance équivalente : $i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \frac{u}{Z_k}$ donc $\frac{1}{Z_{\text{éq}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k}$, soit $Y_{\text{éq}} = \sum_{k=1}^n Y_k$

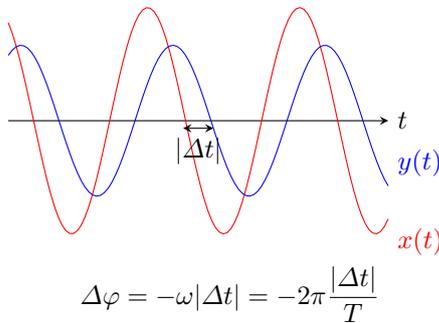
Diviseur de courant : $i_k = \frac{u}{Z_k}$ et $i = \frac{u}{Z_{\text{éq}}}$, donc $i_k = \frac{\frac{1}{Z_k}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{Z_j}} i$, soit $i_k = \frac{Y_k}{\sum_{j=1}^n Y_j} i$

III Déphasage

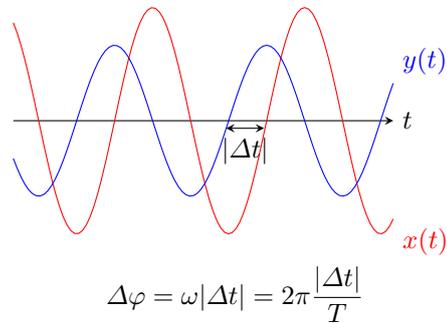
On considère 2 signaux sinusoïdaux de même pulsation : $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi_x)$ et $Y(t) = Y \cos(\omega t + \varphi_y)$ avec X et $Y > 0$. On note $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$, le déphasage de y par rapport à x .

1 Avance/retard de phase

Si $\Delta\varphi \in]-\pi, 0[$ modulo 2π , on dit que y est en retard de phase sur x .

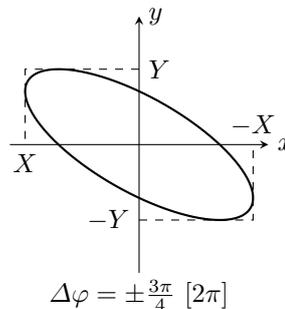
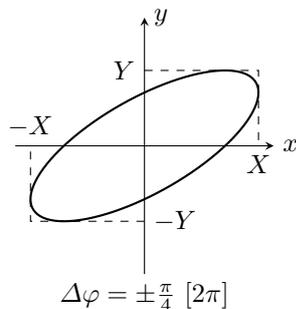


Si $\Delta\varphi \in]0, \pi[$ modulo 2π , on dit que y est en avance de phase sur x .

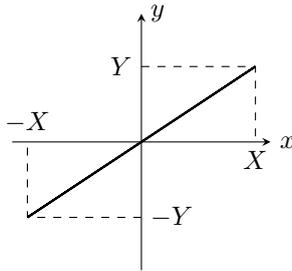


2 Graphe $y(x)$: courbes de Lissajous

En général, le graphe $y(x)$ est une ellipse inclinée :

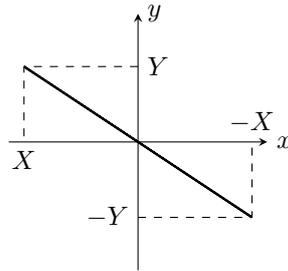


L'allure du graphe $y(x)$ permet de repérer certaines valeurs de déphasage particulières :



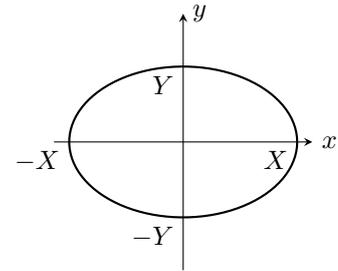
$$\Delta\varphi = 0 [2\pi]$$

Signaux en phase



$$\Delta\varphi = \pi [2\pi]$$

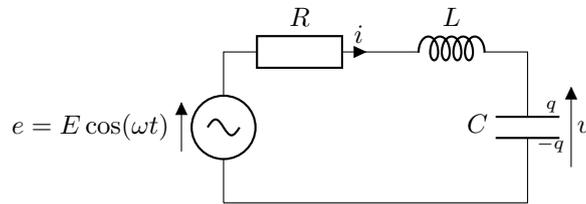
Signaux en opposition de phase



$$\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Signaux en quadrature

IV Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé



1 Étude de l'intensité

a Expression

La loi des mailles en régime sinusoïdal s'écrit : $e - (R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega})i = 0$, d'où $\underline{I} = \frac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$

La forme canonique de cette expression est : $\underline{I} = \frac{K}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$

$$\text{Or } \underline{I} = \frac{\frac{E}{R}}{1 + j\frac{L}{R}\omega - j\frac{1}{RC\omega}}, \text{ on identifie ainsi } \begin{cases} K = \frac{E}{R} \\ \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} K = \frac{E}{R} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

On retrouve la pulsation propre et le facteur de qualité du circuit RLC série.

$$\text{Finalement, } i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ avec } \begin{cases} I = |\underline{I}| = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} \\ \varphi_i = \arg(\underline{I}) = -\arg\left[1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})\right] = \arctan\left[Q(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})\right] \end{cases}$$

b Étude en ω_0 , haute et basse fréquence

$$\text{En } \omega = \omega_0, \underline{I} = \frac{E}{R} \text{ donc } \begin{cases} I = |\underline{I}| = \frac{E}{R} \\ \varphi_i = \arg(\underline{I}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{A basse fréquence } \omega \ll \omega_0, \underline{I} \sim \frac{E}{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}} = j\frac{E\omega}{RQ\omega_0} \text{ donc } \begin{cases} I = |\underline{I}| \sim \frac{E\omega}{RQ\omega_0} \\ \varphi_i = \arg(\underline{I}) \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{A haute fréquence } \omega \gg \omega_0, \underline{I} \sim \frac{E}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} = -j\frac{E\omega_0}{RQ\omega} \text{ donc } \begin{cases} I = |\underline{I}| \sim \frac{E\omega_0}{RQ\omega} \\ \varphi_i = \arg(\underline{I}) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

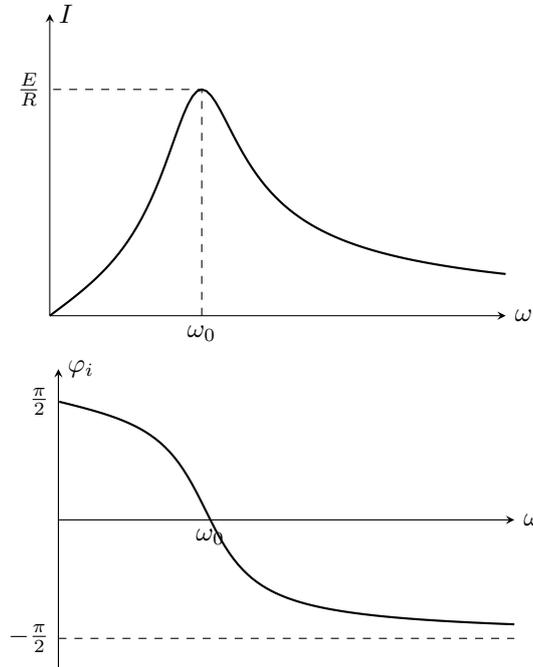
c Résonance en intensité

Le terme $(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2 \geq 0$ s'annule en $\omega = \omega_0$, donc admet un minimum en ω_0 .

Par composition, $I = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$ admet donc un maximum en ω_0 . On dit qu'il y a résonance en intensité.

La pulsation de résonance en intensité est ω_0 et $I_{\max} = \frac{E}{R}$.

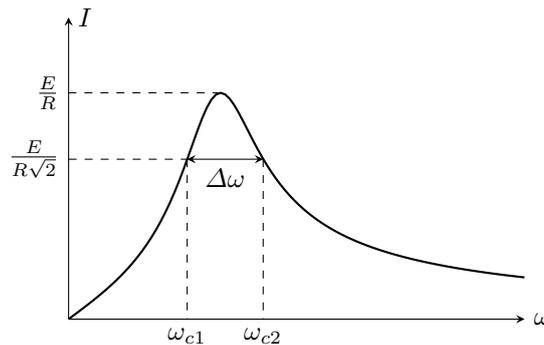
d Graphes de l'amplitude et de la phase à l'origine



e Acuité de la résonance

Plus le pic de résonance est fin, plus la résonance est dite aigüe.

L'acuité de la résonance en intensité vaut $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$, où $\Delta\omega$ est la largeur du pic à $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$.¹



Démonstration :

On cherche les pulsations ω_{c1} et ω_{c2} telles que $I = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c})^2}} = \frac{E}{R\sqrt{2}}$,

c'est-à-dire $Q^2(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c})^2 = 1$, d'où $\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} = \pm \frac{1}{Q}$, soit $\omega_c^2 \pm \frac{\omega_0}{Q}\omega_c - \omega_0^2 = 0$

Le discriminant de ces 2 équations est : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2 > 0$

Les 4 solutions de ces 2 équations sont donc : $\omega_c = \pm \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{2Q}(\pm 1 \pm \sqrt{1+4Q^2})$

ω_{c1} et ω_{c2} sont les 2 solutions positives : $\omega_{c1}^2 = \frac{\omega_0^2}{2Q}(\sqrt{1+4Q^2} - 1)$

La largeur du pic à $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ est donc $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}$, d'où $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$.

1. La $\sqrt{\quad}$ vient du fait que la puissance du signal est proportionnelle à I^2 . Une division par 2 de la puissance correspond donc à une division par $\sqrt{2}$ de l'amplitude.

2 Étude de la tension aux bornes du condensateur

a Expression

D'après le diviseur de tension, $\underline{U} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} E$

La forme canonique de cette expression est : $\underline{U} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$

$$\text{Or } \underline{U} = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}, \text{ on identifie ainsi } \begin{cases} K = E \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} K = E \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

On retrouve la pulsation propre et le facteur de qualité du circuit RLC série.

$$U = |\underline{U}| = \frac{E}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{\omega}{Q\omega_0})^2}}$$

La partie réelle de $1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}$ change de signe, donc son argument ne peut pas s'exprimer directement comme un arctan. On transforme \underline{U} pour se ramener à une partie réelle positive au dénominateur :

$$\underline{U} = \frac{-jE}{-j(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + \frac{\omega}{Q\omega_0}} \text{ d'où } \varphi_u = \arg(-jE) - \arg\left[\frac{\omega}{Q\omega_0} - j(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})\right] = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

$$\text{Finalement, } u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u) \text{ avec } \begin{cases} U = \frac{E}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{\omega}{Q\omega_0})^2}} \\ \varphi_u = \arctan\left[Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right] - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

b Étude en ω_0 , haute et basse fréquence

$$\text{En } \omega = \omega_0, \underline{U} = -jQE \text{ donc } \begin{cases} U = |\underline{U}| = QE \\ \varphi_u = \arg(\underline{U}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{A basse fréquence } \omega \ll \omega_0, \underline{U} \rightarrow E \text{ donc } \begin{cases} U = |\underline{U}| \rightarrow E \\ \varphi_u = \arg(\underline{U}) \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\text{A haute fréquence } \omega \gg \omega_0, \underline{U} \sim \frac{E}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{E\omega_0^2}{\omega^2} \text{ donc } \begin{cases} U = |\underline{U}| \sim \frac{E\omega_0^2}{\omega^2} \\ \varphi_u = \arg(\underline{U}) \rightarrow -\pi \quad (\varphi_u < 0 \text{ car } \text{Im}[\underline{U}] < 0) \end{cases}$$

c Condition de résonance en charge (résonance en tension aux bornes du condensateur)

$$U = \frac{E}{\sqrt{f(\frac{\omega}{\omega_0})}} \text{ avec } f(x) = (1 - x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2$$

On étudie les variations de f sur \mathbb{R}_+ : $f'(x) = 2(1 - x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2} = 2x(2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2})$

$$f'(x) \geq 0 \text{ (avec } x \geq 0) \Leftrightarrow 2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$f' \text{ change de signe si } 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0, \text{ c'est-à-dire } \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 0,7$$

Si $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, il n'y a pas de résonance en charge.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	1	$\longrightarrow +\infty$
ω	0	$+\infty$
U	E	$\longrightarrow 0$

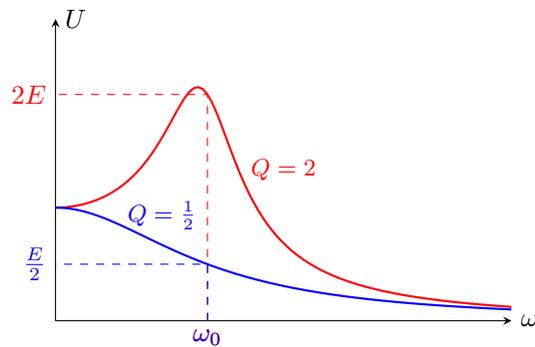
Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance en charge.

x	0	$\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$	$+\infty$	
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	1	↗ ↘		$+\infty$
ω	0	$\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$	$+\infty$	
U	E	↗ U_{\max} ↘		0

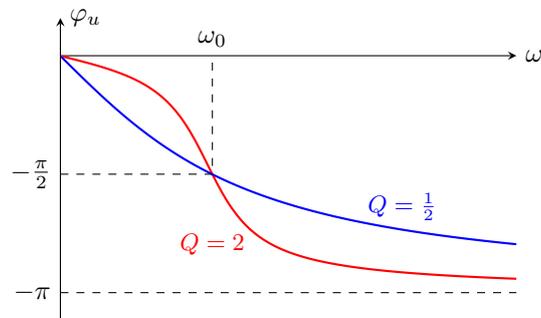
La pulsation de résonance en charge est $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$.

En l'absence d'amortissement, $Q \rightarrow +\infty$, donc $\omega_r \rightarrow \omega_0$.

d Graphes de l'amplitude et de la phase à l'origine



Comme $\omega_r \xrightarrow{Q \gg 1} \omega_0$, on a $U_{\max} \underset{Q \gg 1}{\sim} EQ$



e Acuité de la résonance

Plus Q est grand, plus la résonance en charge est aigüe : $\frac{\omega_r}{\Delta\omega} \underset{Q \gg 1}{\sim} Q$