MPSI[1] Lycée Corneille 2023/2024

Programme de colle de mathématiques
Semaine 12 - Du 18 au 22 Décembre 2023

XI. Limites-Continuité

- Notion de voisinage. Propriétés vraies au voisinage d'un point.
- Maximum, minimum, borne supérieure, inférieure d'une fonction.
- Limite (finie ou infinie) d'une fonction en a $a \in \overline{I}$ ou $a = \pm\infty$. Opérations sur les limites dont la composition. Limites et inégalités.
- Caractérisation séquentielle de la limite. Application à la non-existence de limite.
- Théorème de la limite monotone.
- Continuité en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité. Prolongement par continuité.
- Continuité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues.
- Négligeabilité, équivalence. Utilisation des équivalents pour le calcul de limites.
- Applications continues. Grands théorèmes de la continuité: valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une application continue, image d'un segment par une application continue, bijection monotone.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Théorème de l'image d'un segment par une fonction continue.
- Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
- Une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule pas sur un intervalle garde un signe constant.
- Une fonction continue sur $[0, +\infty[$ ayant une limite finie en $+\infty$ est bornée. Deux méthodes.
- DS4. Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, la suite (S_n) est convergente.
- DS4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que : $I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

Cahier de colles : groupes 5,6,7,8.