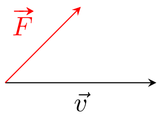
I Travail d'une force

1 Puissance d'une force

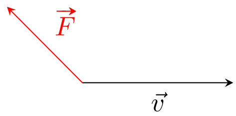
La puissance d'une force $\vec{F}$ est : $\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point d'application M.

La puissance s'exprime en **Watt** ($\mathrm{W} = \mathrm{N.m.s^{-1}} = \mathrm{kg.m^2.s^{-3}}$)

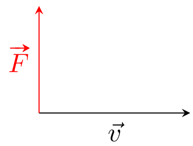
Si $\mathcal{P}(\vec{F}) > 0$, $\vec{F}$ est dite motrice.



Si $\mathcal{P}(\vec{F}) < 0$, $\vec{F}$ est dite résistante.



Si $\mathcal{P}(\vec{F}) = 0$, $\vec{F}$ ne travaille pas.



2 Travail d'une force

Lorsque le point d'application M se déplace de $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, le **travail élémentaire** de $\vec{F}$ est : $\boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ donc $\mathcal{P}(\vec{F}) = \dfrac{\delta W(\vec{F})}{\mathrm{d}t}$

Lorsque le point d'application M se déplace de A à B, le travail de $\vec{F}$ est

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

Le travail s'exprime en **Joule** ($\mathrm{J} = \mathrm{W.s} = \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$).

3 Cas d'une force constante

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{F} \cdot \int_A^B \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{F} \cdot \left[\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right] = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

4 Cas d'une force de frottement de norme constante

Une force de frottement est toujours opposée au mouvement, soit $\vec{f} = -f\vec{u}_t$ (où $\vec{u}_t$ est le vecteur tangent de la base de Frenet), donc

$$W_{AB}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -f \int_A^B \underbrace{\vec{u}_t \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}_{\mathrm{d}\ell} = -f\ell_{AB}$$

où ℓ_{AB} est la longueur de la trajectoire entre A et B.

II Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel est $\boxed{E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2}$

1 Théorème de la puissance cinétique

$$\boxed{\text{Dans un référentiel galiléen, } \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}} \mathcal{P}(\vec{F})}$$

Démonstration :

D'après le principe fondamental de la dynamique, dans un référentiel galiléen, $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}} \vec{F}$, donc

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} &= \sum_{\vec{F}} \vec{F}\cdot\vec{v} \\
m\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}v_x + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}v_y + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}v_z\right) &= \sum_{\vec{F}} \mathcal{P}(\vec{F}) \\
m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2}\right) &= \sum_{\vec{F}} \mathcal{P}(\vec{F}) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \sum_{\vec{F}} \mathcal{P}(\vec{F})
\end{aligned}$$

2 Théorème de l'énergie cinétique

$\boxed{\text{Dans un référentiel galiléen, } E_{\mathrm{c}B} - E_{\mathrm{c}A} = \sum_{\vec{F}} W_{AB}(\vec{F})}$ ou $\Delta E_{\mathrm{c}} = \sum_{\vec{F}} W(\vec{F})$

Démonstration :

D'après le théorème de la puissance cinétique, dans un référentiel galiléen, $\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}} \mathcal{P}(\vec{F})$, donc

$$\begin{aligned}
\int_A^B \mathrm{d}E_{\mathrm{c}} &= \int_A^B \sum_{\vec{F}} \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t \\
E_{\mathrm{c}B} - E_{\mathrm{c}A} &= \sum_{\vec{F}} \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \sum_{\vec{F}} W_{AB}(\vec{F})
\end{aligned}$$

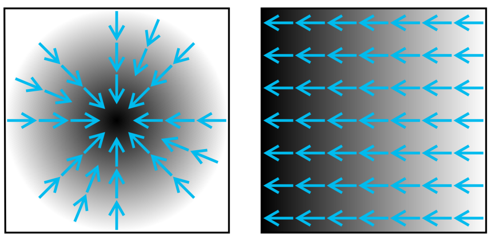
III Énergie potentielle

1 Gradient d'un champ scalaire

Un **champ** est une grandeur définie en tout point de l'espace, c'est-à-dire une fonction du point M, de coordonnées (x, y, z).

Le **gradient** d'un champ scalaire $f(x, y, z)$ est le champ vectoriel $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z}$.[1]

En tout point, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f$ est orienté dans la direction où f varie le plus rapidement, dans le sens des f croissants. Sa norme $\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f\|$ est d'autant plus grande que f varie rapidement.



Champs scalaires représentés par un dégradé (blanc = valeur minimale, noir = valeur maximale) et gradients associés représentés par des flèches

1. On peut exprimer le gradient en coordonnées cylindriques et sphériques, en utilisant les expressions du déplacement élémentaire et de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables.
En coordonnées cylindriques, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$ et $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$
$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$; on identifie ainsi $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$.
En coordonnées sphériques, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$ et $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi$
$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$; on identifie ainsi $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$.

Propriété : $\boxed{\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}}\ f \Leftrightarrow \mathrm{d}f = \vec{G} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$

Sur les surfaces où f est constante, $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\text{grad}}\ (f) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = 0$, donc $\overrightarrow{\text{grad}}\ f$ est orthogonal aux surfaces iso-f.

2 Force conservative

Une force $\vec{F}$ est dite conservative si il existe un champ $E_\mathrm{p}(M)$ tel que

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\mathrm{d}E_\mathrm{p} \text{ , c'est-à-dire } \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_\mathrm{p}}$$

Le travail de $\vec{F}$ entre A et B s'écrit alors :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = -\int_A^B \mathrm{d}E_\mathrm{p} = E_{\mathrm{p}A} - E_{\mathrm{p}B} = -\Delta E_\mathrm{p}$$

Par conséquent, le travail d'une force conservative ne dépend que des points de départ et d'arrivée et non du chemin suivi.

L'énergie potentielle E_p est définie à une constante près.

3 Énergie potentielle de pesanteur

Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est une force conservative, associée à l'énergie potentielle de pesanteur :

- $E_\mathrm{pp} = mgz$ si $\vec{u}_z$ est vertical vers le haut,
- $E_\mathrm{pp} = -mgz$ si $\vec{u}_z$ est vertical vers le bas,

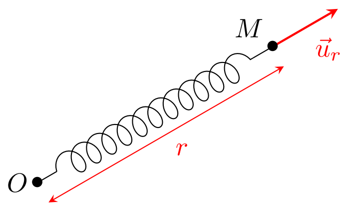
Démonstration :

On cherche E_pp telle que $\mathrm{d}E_\mathrm{pp} = -\delta W(\vec{P}) = -\vec{P} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$
avec $\vec{P} = \mp mg\vec{u}_z$ ($-$ si $\vec{u}_z$ vers le haut, $+$ si $\vec{u}_z$ vers le bas) et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$,
c'est-à-dire $\mathrm{d}E_\mathrm{pp} = \pm mg\mathrm{d}z$, soit $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{pp}}{\mathrm{d}z} = \pm mg$, d'où $E_\mathrm{pp} = \pm mgz + \text{cste}$
On choisit la cste pour que $E_\mathrm{pp}(0) = 0$.

4 Énergie potentielle élastique d'un ressort

La force de rappel d'un ressort une force conservative associée à l'énergie potentielle élastique $\boxed{E_\mathrm{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2}$

Démonstration :



On considère un point matériel M accroché à un ressort. On note O l'autre extrémité, fixe, du ressort. Le point M est repéré par ses coordonnées sphériques de centre O, d'où $\ell = r$.
On cherche E_pe telle que $\mathrm{d}E_\mathrm{pe} = -\delta W(\vec{F}_r) = -\vec{F}_r \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$
avec $\vec{F}_r = -k(r - \ell_0)\vec{u}_r$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$,
c'est-à-dire $\mathrm{d}E_\mathrm{pe} = k(r - \ell_0)\mathrm{d}r$, soit $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{pe}}{\mathrm{d}r} = k(r - \ell_0)$, d'où $E_\mathrm{pe} = \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 + \text{cste}$
On choisit la cste pour que $E_\mathrm{pe}(\ell_0) = 0$.

5 Énergie potentielle gravitationnelle

La force de gravitation créé par un astre ponctuel au point O, de masse M_O, est une force conservative, associée à l'énergie potentielle gravitationnelle $\boxed{E_\mathrm{pg} = -\mathcal{G}\dfrac{mM_O}{r}}$, en coordonnées sphériques de centre O.

Démonstration :

On cherche E_pg telle que $\mathrm{d}E_\mathrm{pg} = -\delta W(\vec{F}_g) = -\vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$
avec $\vec{F}_g = -\mathcal{G}\frac{mM_O}{r^2}\vec{u}_r$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$,
c'est-à-dire $\mathrm{d}E_\mathrm{pg} = \mathcal{G}\frac{mM_O}{r^2}\mathrm{d}r$, soit $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{pg}}{\mathrm{d}r} = \mathcal{G}\frac{mM_O}{r^2}$, d'où $E_\mathrm{pg} = -\mathcal{G}\frac{mM_O}{r} + \text{cste}$
On choisit la cste pour que $\lim\limits_{r \to +\infty} E_\mathrm{pg} = 0$.

IV Énergie mécanique

$$\boxed{E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + \sum E_\mathrm{p}}$$

1 Théorème de la puissance mécanique

Dans un référentiel galiléen, $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{nc}} \mathcal{P}(\vec{F}_\mathrm{nc})$, où les $\vec{F}_\mathrm{nc}$ sont les forces non-conservatives.

Démonstration :

D'après le théorème de la puissance cinétique, $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{c}} \mathcal{P}(\vec{F}_\mathrm{c}) + \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{nc}} \mathcal{P}(\vec{F}_\mathrm{nc})$,

or les forces conservatives $\vec{F}_\mathrm{c}$ vérifient $\delta W(\vec{F}_\mathrm{c}) = -\mathrm{d}E_\mathrm{p}$, d'où $\mathcal{P}(\vec{F}_\mathrm{c}) = \dfrac{\delta W(\vec{F}_\mathrm{c})}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$.

Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = -\sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{c}} \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} + \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{nc}} \mathcal{P}(\vec{F}_\mathrm{nc})$, c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_c + \sum E_\mathrm{p}\right) = \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{nc}} \mathcal{P}(\vec{F}_\mathrm{nc})$

2 Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, $E_{\mathrm{m}B} - E_{\mathrm{m}A} = \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{nc}} W_{AB}(\vec{F}_\mathrm{nc})$ ou $\Delta E_\mathrm{m} = \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{nc}} W(\vec{F}_\mathrm{nc})$,

Démonstration :

D'après le théorème de l'énergie cinétique, dans un référentiel galiléen, $\Delta E_\mathrm{c} = \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{c}} W(\vec{F}_\mathrm{c}) + \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{nc}} W(\vec{F}_\mathrm{nc})$,

or les forces conservatives $\vec{F}_\mathrm{c}$ vérifient $W(\vec{F}_\mathrm{c}) = -\Delta E_\mathrm{p}$.

Ainsi $\Delta E_\mathrm{c} = -\sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{c}} \Delta E_\mathrm{p} + \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{nc}} W(\vec{F}_\mathrm{nc})$, c'est-à-dire $\Delta\left(E_c + \sum E_\mathrm{p}\right) = \sum\limits_{\vec{F}_\mathrm{nc}} W(\vec{F}_\mathrm{nc})$