Chapitre
Dérivation

I Fonctions dérivables

I.1 Dérivabilité en un point

Définition (Dérivabilité en un point)

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$.

- On dit que f **est dérivable en** a si le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (appelé taux d'accroissement de f en a) admet une limite finie en a que l'on note

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{appelé nombre dérivé de } f \text{ en } a.$$

- On dit que f **est dérivable à droite (resp. à gauche) en** a si le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à droite (resp. à gauche) quand $x \to a$ que l'on note

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \left(\text{resp. } f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right).$$

Remarques

1) Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ peut être remplacé par $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ dont on étudie la limite quand $h \to 0$.
2) Si $I = [a, b[$ ou $[a, b]$ alors f dérivable en a et f dérivable à droite en a sont des notions identiques.
3) f est dérivable en a si et seulement si

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

autrement dit

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

qu'on appelle **développement limité à l'ordre** 1 **de** f.

4) La dérivabilité en un point est une propriété locale.

Exemple

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la dérivabilité de $f_n : x \mapsto x^n$ en $a \in \mathbb{R}$.

2) Étudier la dérivabilité de cos en $a \in \mathbb{R}$.

☞ **Explication** ☜ **Interprétation graphique de la dérivée**
Si f est dérivable en a, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ en a, T_a a pour équation $T_a : y = (x-a)f'(a) + f(a)$ (reconnaître la partie principale du développement limité à l'ordre 1 de f en a).

Notons que si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale en a.

Dans le cas où $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent et sont distincts alors $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.

Théorème (Caractérisation de la dérivabilité en un point)

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \mathring{I}$ (i.e. $a \in I$ et a distinct des bornes de I). Alors:

$$f \text{ dérivable en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à gauche et à droite et en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}.$$

Dans ce cas $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exercice. Étudier la dérivabilité en 0 de $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

✎ **En pratique** ✎ Ce résultat est utile quand f est définie par des expressions distinctes selon la position de x par rapport à a. Autrement dit, f définie par morceaux.

Théorème (Dérivable ⇒ continue)

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

⚠ **Attention** ⚠ La réciproque est fausse! Contre-exemple :

1)

2)

3) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

I.2 Dérivabilité sur un intervalle

Définition (Dérivabilité sur un intervalle)

Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On dit que f **est dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I. On définit alors la fonction dérivée de f notée f' par:

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}.$$

On note $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Théorème (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

1) **Somme**. $f+g$ est dérivable sur I avec $(f+g)' = f' + g'$

2) **Multiplication par un scalaire**. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I avec $(\lambda f)' = \lambda f'$

3) **Produit**. fg est dérivable sur I avec $(fg)' = f'g + fg'$

4) **Inverse**. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I avec $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$

5) **Quotient**. Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I avec $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Exercice. Soient $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions dérivables sur un intervalle I. Montrer que $f_1 \cdots f_n$ est dérivable sur I et donner l'expression de la dérivée.

Théorème (Dérivée de la composition)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, deux fonctions $u : I \to \mathbb{R}$, $v : J \to \mathbb{R}$ dérivables tel que $u(I) \subset J$. On peut donc définir $v \circ u : I \to \mathbb{R}$.
Alors $v \circ u$ dérivable sur I avec:

$$\forall x \in I,\ (v \circ u)'(x) = v'(u(x))u'(x) \qquad \text{ou encore} \qquad (v \circ u)' = v' \circ u \times u'.$$

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Comment étudier la dérivabilité d'une fonction)**

- **Dérivabilité en un point** $a \in I$:
  - **Méthode 1** : on montre que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a.
  - **Méthode 2** : si l'expression de f diffère à gauche et à droite de a, on distingue les limites à gauche et à droite du aux d'accroissement.
  - **Méthode 3** : on peut utiliser le théorème de la limite de la dérivée (voir plus loin).
- **Dérivabilité sur un intervalle** I. On utilise les théorèmes généraux d'opérations sur les fonctions dérivables en "décortiquant" la fonction à étudier.

Exercice. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer les dérivées.

1) $f(x) = \sin^3(\ln x + 1)$

2) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 3}$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

4) $f(x) = \operatorname{Arcsin} x^2 - 1$

5) $f(x) = (1+x)^x$

6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^x}{e^x - 1}}$.

Théorème (Dérivabilité réciproque)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to J$ tels que

- f dérivable sur I avec: $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$
- f est une bijection de I dans J

Alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur J de dérivée

$$\forall y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \text{ou encore} \qquad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Remarques

- Pour retrouver la formule de dérivation on peut dériver la relation $(f \circ f^{-1})(y) = y$ qui donne $f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1$ et donc $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.
- Ce théorème a été utilisé pour étudier la dérivabilité de exp, Arccos, Arccos, Arctan (cf. Chapitre Fonctions usuelles).

I.3 Dérivées successives

Définition (Dérivées successives, classe $\mathcal{C}^k$)

- Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On définit **les dérivées successives** de f (si elles existent) par récurrence:
  - $f^{(0)} = f$
  - pour $k \in \mathbb{N}$, si on a réussi à définir $f^{(k)}$ sur I au cours des étapes précédentes et si $f^{(k)}$ est dérivable sur I, on pose $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

  Alors f^k est la dérivée k-ième de f, notée parfois $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$, si la variable de f est x. On dit alors que f est k fois dérivable sur I.
- Pour $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{D}^k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables.
- Pour $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables dont **la dérivée k-ième est continue**. En particulier, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues. On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I. Enfin, si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ on dit que f **est de classe $\mathcal{C}^k$**.

Remarques

- **Fonctions usuelles du lycée.** Les fonctions polynomiales, rationnelles, cos, sin, exp, ln sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ là où elles sont définies.
- **Abus de notation.** Le "(k)" dans $f^{(k)}$ doit porter sur une fonction et non sur expression. Il n'est donc pas correct d'écrire $(f(x))^{(k)}$, $(cos(x))^{(k)}$, $(x^3)^{(k)}$. Dans certains cas (très rares), on rencontrera cet abus et on l'évitera autant que possible.
- ⚠ **Attention** ⚠ Ne pas confondre "k fois dérivable" avec "de classe $\mathcal{C}^k$".
- **Prouver qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$.** On raisonne par récurrence. Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ on montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **Échelle de la régularité.** On a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^\infty(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^2(I) \subset \mathcal{D}^2(I) \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

Théorème (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

Soient deux fonctions f, g de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

1) **Somme**. $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
2) **Multiplication par un scalaire**. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
3) **Produit**. fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, la formule de Leibniz :
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$
4) **Inverse**. Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
5) **Quotient**. Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
6) **Composition**. $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J avec $u(I) \subset J$.

Exercice.

1) Étudier la classe des fonctions f, g, h définies par :
$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^3\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$
2) Après avoir justifié leur existence, calculer les dérivées successives de $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$, de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$, de $x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$.
3) Après avoir justifié leur existence, calculer les dérivées successives de $x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Théorème (Dérivabilité réciproque)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to J$ tels que

- f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec: $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$
- f est une bijection de I dans J

Alors f^{-1} : est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

II Les grands théorèmes

II.1 Nullité de la dérivée en un extremum

Théorème (Extremum $\Rightarrow$ point critique)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$. Si:

1) f admet un extremum local en a
2) f est dérivable en a

alors $f'(a) = 0$.

Remarques

Ce résultat est utilisé pour rechercher les extrema éventuels d'une fonction.

⚠ **Attention** ⚠

1) Il est important que a appartienne à **l'intérieur de** I.

2) La réciproque est fausse. Autrement dit, on peut avoir $f'(a) = 0$ sans pour autant que a soit un extremum local. Contre-exemple :

II.2 Théorème de Rolle

Théorème (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction où $a < b$. On suppose

1) f continue sur $[a, b]$
2) f dérivable sur $]a, b[$
3) $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarques (Les hypothèses sont essentielles)

f dérivable

f continue en a et b

$f(a) = f(b)$

Remarques

Le théorème de Rolle est un théorème d'existence, pas d'unicité.

Exercice. On considère la fonction polynomiale $P(x) = x^n + ax + b$ où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction P possède au plus trois racines réelles distinctes.

II.3 Théorème des accroissements finis

Théorème (Théorème ou égalité des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction où $a < b$. On suppose

1) f continue sur $[a, b]$
2) f dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ i.e. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarques

1) Ce théorème est un théorème d'existence, pas d'unicité.
2) Ce théorème généralise le théorème de Rolle, au sens où on retrouve le théorème de Rolle, si on suppose de plus que $f(a) = f(b)$ car alors $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ devient $f'(c) = 0$.
3) Ce théorème est en fait équivalent au théorème de Rolle. Toutes les hypothèses sont nécessaires.

✎ Méthode pratique ✎ (Application du TAF)

On peut utiliser le TAF pour :

- calculer une limite
- prouver un encadrement
- déterminer un équivalent.

Le TAF peut bien s'y prêter lorsque qu'apparaît une forme $f(b) - f(a)$ que l'on réécrit alors $f'(c)(b-a)$.

Exercice.

1) Calculer la limite en 1 de $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$.

2) Montrer que : $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$.

3) Déterminer un équivalent de $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Si $|f'|$ est majorée sur I par K alors f est K-lipschitzienne sur I i.e.

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|, \quad .$$

Exercice. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

✎ Méthode pratique ✎ (Étude de suite récurrente)

On peut utiliser le caractère lipschitzien de f pour l'étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.

- On détermine un point l explicitement (résolution de l'équation $f(x) = x$) ou simplement son existence(unicité) (avec TBM ou TVI)
- On prouve que f est K-lipschitzienne avec $0 \leqslant K < 1$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.
- Il découle : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leqslant K|u_n - l|$.
  Puis : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leqslant K^n|u_0 - l|$.
- Le théorème des gendarmes permet de conclure.

Exercice. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0 \end{cases}$ où $f(x) = \sqrt{2+x}$.

1) Montrer que $\mathbb{R}_+$ est stable par f puis que f admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. En déduire que f est lipschitzienne.

3) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

4) En déduire alors que (u_n) converge.

II.4 Dérivabilité et variations

Théorème (Caractérisation des fonctions monotones)

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ où $\boxed{I \text{ est un intervalle}}$. On suppose que f dérivable sur I. Alors

1) f croissante sur $I \Leftrightarrow f' \geqslant 0$ sur I

2) f décroissante sur $I \Leftrightarrow f' \leqslant 0$ sur I

3) f constante sur $I \Leftrightarrow f' = 0$ sur I.

⚠ **Attention** ⚠ L'hypothèse I intervalle est essentielle dans les trois cas.

Exercice. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \operatorname{signe}(x)\dfrac{\pi}{2}$.

Peut-on généraliser ce théorème pour le cas des fonctions strictement monotones en remplaçant simplement les inégalités larges par des inégalites strictes?

Théorème (Caractérisation des fonctions strictement monotones)

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ où I est un intervalle. On suppose que f dérivable sur I. Alors

1) f strictement croissante sur $I \Leftrightarrow \begin{cases} f' \geqslant 0 \text{ sur } I \\ \{x \in I \;/\; f'(x) = 0\} \text{ ne contient aucun intervalle ouvert} \end{cases}$

2) f strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow \begin{cases} f' \leqslant 0 \text{ sur } I \\ \{x \in I \;/\; f'(x) = 0\} \text{ ne contient aucun intervalle ouvert} \end{cases}$

Conséquence :

- si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I
- si $f' \geqslant 0$, et f' ne s'annule qu'en un **nombre fini de points** alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Exercice. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II.5 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème (Théorème de la limite de la dérivée)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit $f \in \mathbb{R}^I$ telle que

- f est continue sur I
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$
- $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = l$.

Alors, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.
Conséquence,

1) si $l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a avec $f'(a) = l$.
   De plus f' est continue en a.
2) si $l = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a.

☞ **Explication** ☜ Ce théorème permet de remplacer l'étude de la dérivabilité en un point via le taux d'accroissement par la limite de la dérivée.
Utilisée pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point, pour étudier le raccord par dérivabilité dans la résolution d'équations différentielles.

Exercice.

1) Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction $\begin{array}{rccc} h: & [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(\sqrt{x}) \end{array}$:

   a) en revenant à la définition b) en utilisant le théorème de la limite de la dérivée.

2) Résoudre l'équation différentielle $x^2 y' + y = 1$.

⚠ **Attention** ⚠ La réciproque du TLD est fausse. Une fonction peut être dérivable en un point sans que la limite de la dérivée existe. Exemple : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Corollaire

Soient I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction définie sur I.
On suppose

- f est continue sur I
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$
- f' possède une limite finie en a

alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

II.6 Cas des fonctions à valeurs complexes

Définition (Dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$)

Soient I un intervalle de R, $a \in I$ et $f \in \mathbb{C}^I$.

- f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe, cette limite est alors notée $f'(a)$.
- f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
- On définit les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exercice.

1) Calculer les dérivées successives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.

2) Calculer les dérivées successives de $(x + \alpha)^n$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème (Caractérisation de la classe $\mathcal{C}^n$)

Soient I un intervalle et $f \in \mathbb{C}^I$. On a:

$$f \text{ de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I \Leftrightarrow \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I.$$

Dans ce cas, on a : $$f^{(n)} = (\mathrm{Re}(f))^{(n)} + \mathrm{i}(\mathrm{Im}(f))^{(n)}.$$

Remarques

- **Ce qui est encore valable**: opérations sur les dérivées, formule de Leibniz, primitive sur un intervalle, fonction à dérivée nulle sur un intervalle, inégalité des accroissements finis, théorème de la limite de la dérivée.
- **Ce qui n'est plus valable**: théorème de la dérivée de la réciproque, dérivée s'annule en un extremum, théorème de Rolle, TAF.

Remarques (Inégalité des accroissements finis - Cas complexe)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Si $|f'|$ est majorée sur I par K alors f est K-lipschitzienne sur I i.e.

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|, \quad .$$

Elle se démontre en appliquant l'inégalité des accroissements finis dans le cas réel à $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Cette inégalité résulte aussi d'une simple majoration d'intégrale (cf. chapitre intégration).