**Exercice 1**

1) Comme $f$ est décroissante alors pour tout $x \geqslant 0$ (par exemple),

$$f(x) \leqslant f(0) \quad \text{donc} \quad g(x) \leqslant \underbrace{f(0) - x}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty} \quad \text{donc d'après le théorème de majoration} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$$

De même pour tout $x \leqslant 0$,

$$f(x) \geqslant f(0) \quad \text{donc} \quad g(x) \geqslant \underbrace{f(0) - x}_{\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty} \quad \text{donc d'après le théorème de minoration} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}.$$

**NB**: on peut aussi appliquer le théorème de la limite monotone. La décroissance de $f$ implique qu'en $+\infty$, $f$ admet une limite finie ou $-\infty$, et qu'alors $g$ admet pour limite $-\infty$. Raisonnement similaire en $-\infty$.

2) $g$ est la somme de $f$ fonction décroissante et $x \mapsto -x$ strictement décroissante donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$.

3) $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme des fonctions $f$ et $x \mapsto -x$ qui le sont et $g$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (d'après 2)), donc d'après le théorème de la bijection monontone, $g$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R}) = ]-\infty, +\infty[$ (d'après les limites calculées en 1)). Donc 0 (qui appartient à $\mathbb{R}$) admet un unique antécédent $c \in \mathbb{R}$ par $g$ il existe donc un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) = 0$ c'est-à-dire $f(c) = c$. Et cette méthode a l'avantage de fournir l'existence et l'unicité de $c$.
Donc $\boxed{f \text{ admet un unique point fixe}}$.

4) Le résultat n'est plus valable si $f$ est une fonction continue et croissante. En effet, la fonction peut admettre plusieurs points fixes ou ne pas en admettre du tout. Donnons des **contre-exemples**:

- en posant $f(x) = x + 1$ alors $f$ est continue, croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(x) - x = 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f$ n'admet pas de point fixe
- en posant $f(x) = x$ alors $f$ est continue, croissante sur $\mathbb{R}$ et tout élément de $\mathbb{R}$ est point fixe de $f$.

(Un seul contre-exemple suffit pour répondre à la question).

**Exercice 2** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par,

$$f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^t + 1}\,\mathrm{d}t \text{ si } x > 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = \frac{1}{2}.$$

1) -a- Soit $x \in ]0, +\infty[$, $t \in [0, x]$, alors

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant t \leqslant x \\ \text{donc} \quad & 1 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x \\ \text{donc} \quad & 2 \leqslant 1 + \mathrm{e}^t \leqslant 1 + \mathrm{e}^x \\ \text{donc} \quad & \boxed{\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^t} \leqslant \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

-b- Soit $x > 0$. Après avoir multiplié l'encadrement de 1)-a- par $t$, on intègre, bornes croissantes, l'encadrement de 1)-a-, pour obtenir :

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ \text{donc} & \displaystyle\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leqslant \int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \\ \text{donc} & \displaystyle\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\frac{x^2}{2} \leqslant \int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} \\ \text{donc} & \displaystyle\boxed{\frac{1}{\mathrm{e}^x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}}. \end{array}$$

-c- Or $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ donc d'après l'encadrement de 1)-b-, et le théorème des gendarmes, $f(x) \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} = f(0)$. Donc $\boxed{f \text{ est continue à droite en } 0}$.

2) -a- L'application $h : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de $t \mapsto \dfrac{t}{\mathrm{e}^t+1}$ donc $g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec pour $x \in ]0,+\infty[$, $h'(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x+1}$ qui est continue par opérations sur les fonctions continues. Donc $h$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$. Par produit par la fonction usuelle $x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } ]0,+\infty[}$.
Pour $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3}h(x) + \frac{2}{x^2}\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} = -\frac{2}{x}f(x) + \frac{2}{x}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1} = -\frac{2}{x}\left(f(x) - \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x) \qquad \text{où} \quad g(x) = \frac{x^2}{2}\left(f(x) - \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)}.$$

-b- D'après l'inégalité de gauche de 1)-b-, $g(x) \geqslant 0$ pour $x > 0$ et donc $f'(x) \leqslant 0$. Donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$. Et comme $f(0) = \frac{1}{2}$ alors $\boxed{f \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+}$ car $\frac{1}{2}$ est le minimum de $f$.

3) -a- D'après une inégalité classique du cours : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^t + 1 \geqslant t$ donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{t}{\mathrm{e}^t+1} \leqslant 1}$.

-b- Soit $x > 0$, on intègre l'inégalité précédente pour $t \in [0,x]$,

$$\int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x 1\,\mathrm{d}t \qquad \text{donc} \qquad f(x) \leqslant \frac{2}{x}.$$

Et comme $f$ est positive : $\forall x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{x}$.
Or $\dfrac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

**Exercice 3**. Facultatif

1) **Analyse** : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant le problème $(P)$ :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad f(0) = f(1) = 0.$$

-a- Soit $x \in \mathbb{R}$, avec $y = 0$ d'une part dans $P$ puis $y = 1$, il vient :

$$f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2} = \frac{f(x)}{2} \qquad\qquad f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{f(x)+f(1)}{2} = \frac{f(x)}{2}.$$

En combinant ces résultat, il découle

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) \text{ ce pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En prenant alors $2x$ à la place de $x$, il on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x + \frac{1}{2}) \qquad \text{donc} \quad \boxed{f \text{ est } \tfrac{1}{2}\text{-périodique}}.$$

-b- Soit $x \in \mathbb{R}$, on prend $2x$ à la place de $x$ et $y = 0$ dans $(P)$, on obtient

$$f(x) = \frac{f(2x) + f(0)}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{f(2x) = 2f(x)}.$$

On montre alors par une récurrence immédiate: $\forall n \in \mathbb{N},\ f(2^n x) = 2^n f(x)$.
Par l'absurde, supposons $f(x) \neq 0$ alors $2^n f(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, ce qui implique que $f$ n'est pas bornée.
Par ailleurs, la continuité de $f$ sur le segment $[0, \frac{1}{2}]$ et la $\frac{1}{2}$-périodicité de $f$ implique que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde
Donc $f(x) = 0$, ce pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $f$ est la fonction nulle.

-c- **Synthèse:** réciproquement la fonction nulle est continue et vérifie les relations de $(P)$.
**Conclusion :** $\boxed{\mathcal{S}_{(P)} = \{x \mapsto 0\}}$.

2) On cherche l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}$.
On note $(P')$ ce problème. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) - (ax + b) \text{ où } a, b \text{ réels choisis tels que } f(0) = f(1) = 0.$$

Or

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(0) = b \\ g(1) = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = g(0) \\ a = g(1) - g(0) \end{cases}.$$

On pose alors un tel $a$ et un tel $b$. Alors, $f$ est continue et

$$\begin{aligned}
g \text{ solution de } (P') &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2} \\
&\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) + a\frac{x+y}{2} + b = \frac{(f(x) + ax + b) + (f(y) + ay + b)}{2} \\
&\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{(f(x) + f(y))}{2} \\
&\Leftrightarrow f \text{ solution de } (P) \\
&\Leftrightarrow f \text{ nulle.} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = (g(1) - g(0))x + g(0) \\
&\Leftrightarrow g \text{ affine.}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}_{(P')} \text{ est l'ensemble des fonctions affines de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.