Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Le but de cet exercice est de montrer que f possède un unique point fixe (c'est-à-dire un point $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$).

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$. Montrer que:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty.$$

2) Montrer que g est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer alors que f admet un unique point fixe.

4) Le résultat démontré dans cet exercice est-il encore vrai pour une fonction continue et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par,

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^t + 1} \, \mathrm{d}t \text{ si } x > 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = \frac{1}{2}.$$

1) -a- Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\forall t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^t + 1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

-b- A l'aide d'un encadrement de $f(x)$ montrer alors que la fonction f est continue à droite en 0.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3) -a- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x} g(x)$ où g est une fonction que l'on déterminera.

-b- En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Facultatif

1) L'objectif de la question 1) est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \qquad f(0) = f(1) = 0.$$

On dira qu'une telle fonction vérifie le problème (P).
Soit f une fonction vérifiant le problème (P).

-a- Montrer que f est périodique de période que l'on déterminera.

-b- Soit $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f(2x)$? Montrer alors par l'absurde que $f(x) = 0$.

-c- Déterminer alors l'ensemble des fonctions solutions de (P).

2) En déduire l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ g\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}.$$

On se ramène au problème (P) en posant une fonction f auxiliaire bien choisie qui dépend de g et qui vérifie $f(1) = f(0) = 0$.