Problème

Partie I - Etude de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [k, k+1]$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{donc par intégration, bornes croissantes, sur } [k,k+1] \quad \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{(k+1)-k}{k+1}} \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}_{=[\ln x]_k^{k+1}} \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{(k+1)-k}{k}}.$$

Ce qui donne finalement : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}}$.

Par conséquent : $\boxed{\forall k \in \geqslant 2, \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)}$.

2) Soit $n \geqslant 2$, on somme l'encadrement précédent pour $k \in [\![2, n]\!]$, et on reconnait deux sommes téléscopiques :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant H_n - 1 \leqslant \ln(n) - \ln(1).$$

Donc,

$$\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(2) + 1 \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

Comme $\ln(n) \to +\infty$ alors $\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(2) + 1 = \mathrm{o}(\ln n)$ et $1 = \mathrm{o}(\ln n)$, donc

$$\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(2) + 1 \sim \ln(n) \qquad \ln(n) + 1 \sim \ln n.$$

Donc par théorème des gendarmes, version équivalents, $\boxed{H_n \sim \ln n}$. Il découle $\boxed{H_n \to +\infty}$.

3) **Monotonie de** (a_n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leqslant 0 \quad \text{(1ère inégalité de 1) avec } n \text{ au lieu de } k).$$

Donc $\boxed{(a_n) \text{ est décroissante}}$

Positivité de (a_n) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après l'inégalité $H_n \geqslant \ln(n+1) + 1 - \ln(2)$ établie en 2),

$$a_n = H_n - \ln n \geqslant \ln(n+1) + 1 - \ln 2 - \ln n = \ln(1 + \frac{1}{n}) + 1 - \ln(2) \geqslant 0 \qquad \text{car } 1 + \frac{1}{n} > 1.$$

Donc $\boxed{(a_n) \text{ est décroissante et positive}}$.

Donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(a_n) \text{ converge, on note } \gamma \text{ sa limite}}$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

-a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} H_{2n} - H_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \quad \text{(changement d'indice } k = n+j\text{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{H_{2n} - H_n = b_n}.$$

-b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n &= (a_{2n} + \ln(2n)) - (a_n + \ln(n)) \quad \text{(d'après I-3, et par définition de } a_n\text{)} \\ &= a_{2n} - a_n + \ln 2 + \ln n - \ln n \end{aligned}$$

Or d'après I-3), (a_n) converge vers une limite notée l, d'où (a_{2n}) converge vers l et donc finalement $\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = \ln 2}$.

Partie II - Etude d'une suite récurrente

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{1-x^2}{(1+x)^4} = \frac{1-x}{(1+x)^3}.$$

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

D'où les variations de f. Notons que $f(x) = \dfrac{2x}{(1+x)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

L'étude de f livre, $f([0,1]) = [0, \frac{1}{4}] \subset [0,1]$ donc $[0,1]$ est stable par f.
Or $u_0 = 1 \in [0,1]$, donc la suite u est définie et à valeurs dans $[0,1]$.
Puis, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) - x = \frac{x}{(1+x)^2} - x = x\left(\frac{1}{(1+u_n)^2} - 1\right) = x\frac{-2x - x^2}{(1+x)^2} = x^2\frac{-2-x}{(1+x)^2} \leqslant 0.$$

Donc $\boxed{u \text{ est décroissante}}$; de plus u est minorée par 0 donc u convergente d'après le théorème de la limite monotone.
L'unique point fixe de $[0,1]$ est 0 ($f(x) - x = 0$ si et seulement si $x = 0$ car $x \in [0,1]$).
Finalement $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.

2) -a- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\frac{1}{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^2} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}} = \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\leqslant 1}\frac{1}{n+2}.$$

Par récurrence, posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$:“$u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ ”
Initialisation. $u_0 = 1 \geqslant 0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}_n$ est vraie. D'après les variations de f, f est croissante sur $[0,1]$ de plus u_n et $\frac{1}{n+1}$ appartiennent à $[0,1]$, d'où $f(u_n) \leqslant f(\frac{1}{n+1})$. L'inégalité qui précède $f(u_n) \leqslant \frac{1}{n+2}$. C'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$.

-b- Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}} = \frac{(1+u_{k-1})^2}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_{k-1}} = \frac{1+2u_{k-1}+u_{k-1}^2}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_{k-1}}$$

$$\boxed{\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}} = 2 + u_{k-1}}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, de plus avec l'inégalité de II-2)-a-, il vient:

$$0 \leqslant u_{k-1} \leqslant \frac{1}{k} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 2 \leqslant \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}} \leqslant 2 + \frac{1}{k}}.$$

-c- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![1, n]\!]$. D'après II-2)-b-, $2 \leqslant \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}} \leqslant 2 + \frac{1}{k}$. On somme cet encadrement pour $k \in [\![1, n]\!]$, il vient

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2}_{=2n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (2 + \frac{1}{k}) = 2n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Or, par téléscopage: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \frac{1}{u_n} - 1.$

On a donc bien: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2n+1 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2n+1+H_n}$.

3) D'après I-2), $H_n \sim \ln n$ donc $2n+1+H_n \sim 2n$. Et $2n+1 \sim 2n$, par théorème des gendarmes versions équivalents, $\frac{1}{u_n} \sim 2n$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{1}{2n}}$.

Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ avec

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x \quad (> 0 \text{ si } x > 0).$$

Par conséquent f_n est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Finalement f_n est continue sur $[0, +\infty[$, strictement monotone sur $[0, +\infty[$ et donc d'après le théorème de la bijection monotone f_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $f_n([0, +\infty[) = [-4, +\infty[$.
Finalement, comme $0 \in [-4, +\infty[$, $\boxed{\text{il existe un unique } x_n \in [0, +\infty[\text{ tel que } f_n(x_n) = 0}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{145}}{18} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{x_1 = \frac{-1+\sqrt{145}}{18}}$$

$$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}.$$

3)
- **Méthode 1**: soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = -4$, $f_n(1) = 6$, de plus f_n continue sur $]0, 1[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$. L'unicité de x_n dans 1) donne $c = x_n$. Finalement $\boxed{x_n \in]0, 1[}$.
- **Méthode 2**: on peut ré-appliquer le théorème de la bijection monotone à f_n sur $]0, 1[$.
- **Méthode 3**: $f_n(0) = -4$, $f_n(1) = 6$ et $f_n(x_n) = 0$ donc $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$. On peut donc appliquer f_n^{-1} qui est strictement croissante comme f_n, d'après le théorème de la bijection monotone, pour obtenir $0 < x_n < 1$.

4) -a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0,1[$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x^{n+1} + 9x^2 - 4) - (x^n + 9x^2 - 4) = x^n(x-1) \quad \text{donc} \quad \boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0}.$$

-b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après 3), $x_{n+1} \in]0,1[$, donc d'après 4)-a- avec $x = x_{n+1}$

$$\underbrace{f_{n+1}(x_{n+1})}_{=0} - f_n(x_{n+1}) < 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{f_n(x_{n+1}) > 0}.$$

Comme $f_n(x_n) = 0$, il vient $f_n(x_{n+1}) > f_n(x_n)$. En appliquant f_n^{-1} qui est strictement croissante il vient $x_{n+1} > x_n$ et donc la suite $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante}}$.

-c- Finalement la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1 donc $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } l \in [0,1]}$.

5) -a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) = 0$ se réécrit $x_n^n = 4 - 9x_n^2$. Comme (x_n) converge vers l, on en déduit que (x_n^n) converge vers $4 - 9l^2$.
Or (x_n^n) est positive car (x_n) est positive, donc par passage à la limite sa limite est positive i.e. $4 - 9l^2 \geqslant 0$.
On en déduit que $l^2 \leqslant \dfrac{4}{9}$ et donc $0 \leqslant l \leqslant \dfrac{2}{3}$. Or d'après le théorème de la limite montone appliquée à (x_n), l est la borne supérieure de (x_n), donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant x_n \leqslant l \leqslant \frac{2}{3} \qquad \text{donc} \qquad 0 \leqslant x_n^n \leqslant l^n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc, par théorème d'encadrement, $\boxed{(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0}$.
Attention : on ne peut utiliser le résultat qui affirme $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ pour $q \in]-1,1[$. Car q doit être indépendant de n, on ne peut donc prendre $q = x_n$ même s'il est vrai que $x_n \in]0,1[$.
Prenez par exemple $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1}$ (utilisez des équivalents par exemple) alors que $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$.

-b- En passant à la limite la relation $x_n^n = 4 - 9x_n^2$, il vient $0 = 4 - 9l^2$ d'où $\boxed{l = \dfrac{2}{3}}$ (car $l \geqslant 0$ d'après 4)-c-).

6) On pose $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = l - x_n \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

-a- Tout d'abord comme déjà vu: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant l$ et donc: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De $x_n^n + 9x_n^2 - 4 = 0$ on tire:

$$\frac{1}{6}x_n^n = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x_n^2 = l - \frac{1}{l}x_n^2 = \frac{1}{l}(l^2 - x_n^2) = \frac{1}{l}\underbrace{(l - x_n)}_{=u_n}\underbrace{(l + x_n)}_{\geqslant l} \geqslant u_n.$$

On a donc bien: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{6}x_n^n}$.

-b- Tout d'abord pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ d'après 6)-a-, donc (S_n) est croissante.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, d'après 6)-a- et le fait que $x_k \leqslant \frac{2}{3}$, on a: $u_k \leqslant \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$.
On somme alors cette inégalité pour $k \in [\![1,n]\!]$, où $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \leqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{6}\frac{2}{3}\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \leqslant \frac{1}{3}.$$

Donc (S_n) est majorée.
Donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(S_n) \text{ converge}}$.