La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice 1

1) Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{3n^3}{n^2+n+1} \times \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n \times \left(\cos\sqrt{\dfrac{1}{n}} - 1\right)$.

2) Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{1-\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}{\ln\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)}$.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$(E_n) : x + \mathrm{e}^{nx} = 2$$

et on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{nx} - 2.$$

1) Montrer que (E_0) admet une unique solution x_0 et préciser sa valeur.

2) Pour $n \geqslant 1$, montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution réelle notée x_n, puis justifier que $x_n \in [0,1]$.

3) Déterminer, en fonction de x le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

4) Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis justifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On notera l sa limite.

5) Déterminer l puis montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{n}$.

6) Déterminer un équivalent de $x_n - \dfrac{\ln(2)}{n}$.

Problème 1. Une fonction de $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble non vide, A et B deux parties de E. On définit la fonction $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ de la manière suivante : si $X \subset E$, alors $f(X) = (X \cap A) \cup B$.

1) Soit X, Y deux parties de E.

   -a- Montrer que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$.

   -b- Montrer que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$.

2) -a- Dans cette question, on suppose que $A = \emptyset$. Calculer $f(X)$ pour tout $X \subset E$.

   -b- Dans cette question, on suppose que $B = E$. Calculer $f(X)$ pour tout $X \subset E$.

   -c- Que remarque-t-on dans les deux cas précédents?

3) Calculer, dans le cas général, $f(\emptyset), f(A), f(B)$ et $f(E)$.

4) Montrer que la fonction f est croissante, au sens de l'inclusion, i.e. que pour toutes parties X, Y de E si $X \subset Y$ alors $f(X) \subset f(Y)$.

5) Soit Y une partie de E. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

   (i) Y admet un antécédent dans $\mathcal{P}(E)$ par f.

   (ii) $B \subset Y \subset A \cup B$.

   (iii) $f(Y) = Y$.

   <u>Indication:</u> Montrer que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

6) -a- Sous quelle condition la partie A admet-elle un antécédent dans $\mathcal{P}(E)$ par f?
   On suppose cette condition réalisée.
   Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, montrer que $f(X) = A \Leftrightarrow (A \setminus B) \subset X$.

   -b- Montrer que la partie B admet toujours un antécédent dans $\mathcal{P}(E)$ par f.
   Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur X pour avoir $f(X) = B$.

7) -a- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit constante.

   -b- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit surjective.

   -c- Montrer que cette dernière condition est aussi nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

8) -a- Dans le cas général, que peut-on dire de $f \circ f$?

   -b- Soit F un ensemble quelconque, soit $g : F \to F$ *idempotente*, i.e. vérifiant $g \circ g = g$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

   (i) La fonction g est injective.

   (ii) La fonction g est surjective.

   (iii) On a $g = \mathrm{Id}_F$.

   <u>Indication:</u> montrer que $(i) \Leftrightarrow (ii)$ *puis que* g *est bijective* $\Leftrightarrow (iii)$.

Problème 2. Une introduction aux séries numériques

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres réels, on appelle **série** de terme général u_n, la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ cette série au lieu de $(S_n)_{n\geqslant 0}$. On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Dans ce cas, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa limite, on dit que c'est la **somme** de la série:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ diverge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **diverge**.

Donner la nature d'une série, c'est indiquer si elle converge ou non. Ce problème propose une introduction à la notion de séries.

1. *Deux exemples :*
   (a) Pour $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \dfrac{1}{3^n}$. Calculer S_n, puis déterminer sa limite. En déduire la nature (c'est-à-dire convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
   (b) Pour $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \ln(n+1) - \ln n$. Calculer S_n, puis déterminer sa limite. En déduire la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
2. *Condition nécessaire de convergence:*
   (a) Démontrer que si la **série** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors la **suite** (u_n) converge vers 0 (on pourra simplifier $S_n - S_{n-1}$).
   (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   (c) Réciproque fausse : démontrer en utilisant un exemple précédent que si une suite (u_n) tend vers 0 , la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas nécessairement.
3. *Séries de Riemann:*
   Soit α un réel. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, et donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$.
   (a) Déterminer la monotonie de la suite (S_n).
   (b) Justifier que pour $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge.
   (c) On suppose désormais jusqu'à la fin de cette partie que $\alpha > 0$. Calculer pour $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et déterminer sa limite (on discutera selon la valeur de α).
   (d) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$. En déduire un encadrement de S_n à l'aide de I_n et de $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$.

(e) Déduire **avec soin** de tous les résultats précédents la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ (on discutera selon la valeur de α).

4. *Critère pour des séries alternées:*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante tendant vers 0 . On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

(a) Démontrer que la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante.

(b) Démontrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, en déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$.

(c) *Application:*

i. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge. On notera S sa somme.

ii. En remarquant que pour tout $k \geqslant 0$, $\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 x^{2k}\mathrm{d}x$, montrer que :

$$\forall\ n \geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

iii. Posons $\forall\ n \geqslant 0,\ J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
Sans calculer J_n, montrer que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

iv. En déduire finalement que $S = \frac{\pi}{4}$.