Exercice 1

1) $u_n \sim 3n \times \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n \times \left(\cos\sqrt{\dfrac{1}{n}} - 1\right)$

$\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln \dfrac{n-1}{n+1}\right)$

$n \ln \dfrac{n-1}{n+1} = n \ln\left(1 - \dfrac{2}{n+1}\right) \sim n \times \dfrac{-2}{n+1} \sim -2$ donc par continuité de l'exponentielle $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{-2}$.

$\cos\sqrt{\dfrac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{-1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}}\right)^2 \sim \dfrac{-1}{2n}$.

Ainsi $u_n \sim 3n \times e^{-2} \times \dfrac{-1}{2n} \sim \dfrac{-3}{2e^2}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-3}{2e^2}.}$

2) Attention, on ne compose pas les équivalents.
Trois approches pour le numérateur:

$1 - \sqrt{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)} = 1 - \sqrt{1 + \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)} \sim \dfrac{-1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right) \sim \dfrac{1}{4n^2}$

ou $1 - \sqrt{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}} \sim \dfrac{\frac{1}{2n^2}}{2} \sim \dfrac{1}{4n^2}$

ou enfin $\sqrt{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)} = 1 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ d'où $1 - \sqrt{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$.

Pour le dénominateur: $\ln\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right) = -\ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right) = -\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{-1}{n^2}$.

Ainsi $u_n \sim \dfrac{\frac{1}{4n^2}}{\frac{-1}{n^2}} \sim \dfrac{-1}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1}{4}.}$$

Exercice 2

1) Pour $x \in \mathbb{N}$,

$$(E_0) \Leftrightarrow x + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$\boxed{(E_0) \text{ admet une unique solution } x_0 = 1.}$

2) Soit $n \geqslant 1$.
f_n est strictement croissante et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ comme somme de $x \mapsto x - 2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{nx}$ qui le sont.
Donc d'après le théorème de la bijection monotone, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{-\infty} f_n, \lim\limits_{+\infty} f_n\right[=]-\infty, +\infty[$ (les limites ont été calculées par opérations).
Comme $0 \in \mathbb{R}$, il admet un unique antécédent par f_n dans $\mathbb{R}$, notée x_n.
Donc $\boxed{\text{l'équation } (E_n) \text{ admet une unique solution notée } x_n}$.
Puis $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = \mathrm{e}^n - 1 > 0$, donc

$$f_n(0) \leqslant f_n(x_n) \leqslant f_n(1).$$

Par stricte croissance de f_n, on déduit $\boxed{0 \leqslant x_n \leqslant 1}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^{nx} = \mathrm{e}^{nx}(\mathrm{e}^x - 1).$$

Donc $\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \geqslant 0 \text{ et } f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant 0 \text{ pour } x \leqslant 0}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On prend $x = x_n \geqslant 0$ dans 3), il vient

$$f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) \geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad f_{n+1}(x_n) \geqslant 0.$$

Or $0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ donc

$$f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1}).$$

La stricte croissance de f_{n+1} donne alors $\boxed{x_n \geqslant x_{n+1}}$.

$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc décroissante}}$.

Comme elle est de plus minorée par 0, alors d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$. On notera l sa limite.

5) En passant à la limite $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, on obtient $0 \leqslant l \leqslant 1$.
Par l'absurde, supposons $l > 0$. On souhaite passer à la limite la relation

$$x_n + \mathrm{e}^{nx_n} = 2.$$

Comme $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par composition et somme de limites on obtient : $+\infty = 2$. Ce qui est absurde. Donc $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

Puis, $\mathrm{e}^{nx_n} = 2 - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. Donc par continuité de ln, $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$ donc $nx_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(2)$, par suite $\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}}$.

6) De $\mathrm{e}^{nx_n} = 2 - x_n$ on tire $nx_n = \ln(2 - x_n)$ donc

$$x_n - \frac{\ln 2}{n} = \frac{1}{n}(\ln(2 - x_n) - \ln(2)) = \frac{1}{n}\ln\left(1 - \frac{x_n}{2}\right).$$

Comme $\frac{x_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, il vient

$$\ln\left(1 - \frac{x_n}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x_n}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{2n}.$$

Finalement : $\boxed{x_n - \frac{\ln 2}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{2n^2}}$.

Problème 1. Une fonction de $\mathcal{P}(E)$

1) Soit X, Y deux parties de E.

-a- $\Rightarrow$: Supposons que $X \subset Y$.
On a toujours $X \cap Y \subset X$.
Puisque $X \subset Y$, $X = X \cap X \subset X \cap Y$. Par double inclusion, $X \cap Y = X$.

$\Leftarrow$: Supposons que $X \cap Y = X$.
Soit $x \in X$, $X \cap Y = X$ donc $x \in X \cap Y$, en particulier $x \in Y$. On a montré que $X \subset Y$.

Par double implication, $\boxed{X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X}$.

-b- $\Rightarrow$: Supposons que $X \subset Y$.
On a toujours $Y \subset X \cup Y$.
Soit $y \in X \cup Y$. Que $y \in X$ ou $y \in Y$ on a $y \in Y$ car $X \subset Y$ donc $X \cup Y \subset Y$. Par double inclusion, $X \cup Y = Y$.

$\Leftarrow$: Supposons que $X \cup Y = Y$.
$X \subset X \cup Y$ et $X \cup Y = Y$ donc $X \subset Y$.

Par double implication, $\boxed{X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y}$.

2) -a- $A = \emptyset$. Soit X une partie de E, $X \cap \emptyset = \emptyset$ donc $\boxed{f(X) = \emptyset \cup B = B}$.

-b- $B = E$. Soit X une partie de E, $X \cap A \subset E$ donc d'après le 1.b $\boxed{f(X) = E}$.

-c- Dans les deux cas précédents, $\boxed{f \text{ est une fonction constante et } \forall X \in \mathcal{P}(E),\ f(X) = B}$.

3) $\boxed{f(\emptyset) = B,\ f(A) = A \cup B,\ f(B) = B \text{ et } f(E) = A \cup B}$.

4) Soit X, Y deux parties de E. On suppose que $X \subset Y$.
On a alors $X \cap A \subset Y \cap A$ puis $(X \cap A) \cup B \subset (Y \cap A) \cup B$ c'est-à-dire $f(X) \subset f(Y)$.
$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est croissante, au sens de l'inclusion}}$.

5) Soit Y une partie de E.
$(i) \Rightarrow (ii)$: On suppose que Y admet un antécédent dans $\mathcal{P}(E)$ par f.
Il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $Y = f(X)$.
$B \subset B \cup (X \cap A)$ donc $B \subset Y$.
$X \cap A \subset A$ donc $(X \cap A) \cup B \subset A \cup B$ c'est-à-dire $Y \subset A \cup B$.
Ainsi $B \subset Y \subset A \cup B$, (ii) est vérifiée.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: C'est l'implication difficile.
On suppose que $B \subset Y \subset A \cup B$.
$\overline{B} \cup B = E$ donc par distributivité de l'union par rapport à l'intersection $Y = Y \cap (\overline{B} \cup B) = (Y \setminus B) \cup (Y \cap B)$.
De plus $B \subset Y$ donc $Y \cap B = B$, on a donc $Y = (Y \setminus B) \cup B$.
Par distributivité de l'intersection par rapport à l'union, $f(Y) = (((Y \setminus B) \cap A) \cup (B \cap A)) \cup B$.
Par associativité de l'union, $f(Y) = ((Y \setminus B) \cap A) \cup ((B \cap A) \cup B)$ $(*)$.
D'une part $Y \subset A \cup B$ donc $(Y \setminus B) \subset A$. D'après le 1.a, $(Y \setminus B) \cap A = Y \setminus B$.
D'autre part, $B \cap A \subset B$ donc d'après le 1.b, $(B \cap A) \cup B = B$.
$(*)$ devient $f(Y) = (Y \setminus B) \cup B$. $Y = f(Y)$, (iii) est vérifiée.

L'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ est immédiate.

On a montré que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$. $\boxed{\text{Les trois propositions sont équivalentes}}$.

6) -a- D'après le 5($(i) \Leftrightarrow (ii)$), A admet un antécédent dans $\mathcal{P}(E)$ par f ssi $B \subset A \subset A \cup B$.
On a toujours $A \subset A \cup B$ donc $\boxed{A \text{ admet un antécédent dans } \mathcal{P}(E) \text{ par } f \text{ ssi } B \subset A}$.

On suppose que $B \subset A$.
Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On suppose que $f(X) = A$.
$(X \cap A) \cup B = A$ donc $((X \cap A) \cup B) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B}$.
Par distributivité de l'intersection par rapport à l'union, on a $((X \cap A) \cap \overline{B}) \cup \emptyset = (A \setminus B)$.
Puis par associativité de l'intersection, on obtient $X \cap (A \cap \overline{B}) = (A \setminus B)$ c'est-à-dire $X \cap (A \setminus B) = (A \setminus B)$.
On peut conclure avec le 1.a, $(A \setminus B) \subset X$.

Réciproquement, on suppose que $(A \setminus B) \subset X$.
$(A \setminus B) \subset X \subset E$ comme d'après le 4 f est croissante on a $f(A \setminus B) \subset f(X) \subset f(E)$ $(*)$.
Montrons que $f(A \setminus B) = f(E) = A$.

- $f(A \setminus B) = ((A \setminus B) \cap A) \cup B = (A \setminus B) \cup B = A \cup B$. Puisque $B \subset A$, $A \cup B = A$ et donc $f(A \setminus B) = A$.
- $f(E) = A \cup B = A$.

Ainsi $f(A \setminus B) = f(E) = A$. Avec $(*)$ on obtient $f(X) = A$.

On a prouvé par double implication que $\boxed{f(X) = A \Leftrightarrow A \setminus B \subset X}$.

-b- $f(\emptyset) = B$ donc $\boxed{B \text{ admet toujours un antécédent dans } \mathcal{P}(E) \text{ par } f}$ (on pouvait aussi remarquer que $B \subset B \subset A \cup B$).

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$.
$$f(X) = B \Leftrightarrow (X \cap A) \cup B = B.$$
Avec le 1.b on a directement
$$\boxed{f(X) = B \Leftrightarrow (X \cap A) \subset B}.$$

7) -a- Si f est constante $f(A) = f(B)$ c'est-à-dire $A \cup B = B$. D'après le 1.a, $A \subset B$.

Réciproquement si $A \subset B$. $f(E) = A \cup B = B$.
Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, $\emptyset \subset X \subset E$.
D'après le 4 f est croissante donc $f(\emptyset) \subset f(X) \subset f(E)$ c'est-à-dire $B \subset f(X) \subset B$.
On a donc $f(X) = B$, f est constante.
On peut conclure: $\boxed{f \text{ est constante ssi } A \subset B}$.

-b- On suppose que f est surjective. D'après le 5 pour toute partie Y de E, $B \subset Y \subset A \cup B$.
Avec $Y = \emptyset$ on obtient $B = \emptyset$ puis avec $Y = E$, $A = E$.

Réciproquement, on suppose que $A = E$ et $B = \emptyset$.
Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (X \cap E) \cup \emptyset = X$. $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ en particulier f est surjective.

On peut conclure: $\boxed{f \text{ est surjective ssi } A = E \text{ et } B = \emptyset}$.

-c- Si $A = E$ et $B = \emptyset$ alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ donc f est injective.

Réciproquement, on suppose que f est injective.
$f(\emptyset) = B = f(B)$ donc $B = \emptyset$ et $f(A) = A \cup B = f(E)$ donc $A = E$.

On peut conclure: $\boxed{f \text{ est injective ssi } A = E \text{ et } B = \emptyset}$.

8) -a- Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. $f(X)$ admet uun antécédent dans $\mathcal{P}(E)$ par f.
D'après le 5.($(i) \Leftrightarrow (iii)$) on a donc $f(f(X)) = f(X)$. Donc $\boxed{f \circ f = f}$.

-b- $(i) \Rightarrow (ii)$: On suppose que g est injective.
Soit $y \in F$, $g \circ g(y) = g(y)$ c'est-à-dire $g\,(g(y)) = g(y)$. g étant injective, $g(y) = y$. g est surjective.

$(ii) \Rightarrow (i)$: On suppose que g est surjective.
Soit $x_1, x_2 \in F$. On suppose que $g(x_1) = g(x_2)$.
g est surjective donc il existe $t_1, t_2 \in F$ tels que $x_1 = g(t_1)$ et $x_2 = g(t_2)$.
$g(x_1) = g(x_2)$ devient $g \circ g(t_1) = g \circ g(t_2)$ puisque $g \circ g = g$, $g(t_1) = g(t_2)$ c'est-à-dire $x_1 = x_2$.
g est injective.

Reste à prouver que g est bijective $\Leftrightarrow (iii)$.
$\Rightarrow$: g est bijective.
g admet une bijection réciproque g^{-1}. En composant $g \circ g = g$ à gauche par g^{-1} on obtient $g^{-1} \circ (g \circ g) = g^{-1} \circ g = \mathrm{Id}_F$.
Par associativité $(g^{-1} \circ g) \circ g = \mathrm{Id}_F$ donc $g = \mathrm{Id}_F$.

$\Leftarrow$: Si $g = \mathrm{Id}_F$, g est bien entendu bijective.

On a prouvé $((i)$ et $(ii)) \Leftrightarrow (iii)$ c'est-à-dire $(i) \Leftrightarrow (iii)$ puisque $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

Donc $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$. $\boxed{\text{Les trois propositions sont équivalentes}}$.

Problème 2. Une introduction aux séries numériques

1. *Deux exemples :*

   (a) Pour $n \geqslant 0, S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$.
   Or $-1 < \frac{1}{3} < 1$, et donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$. Par opérations sur les limites finies, nous obtenons $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{2}$:
   $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} u_n \text{ converge et sa somme vaut } \frac{3}{2}.}$

   (b) Pour $n \geqslant 1$, par télescopage, on a :
   $$\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$
   $\boxed{\text{La série } \sum_{n \geqslant 1} (\ln(n+1) - \ln n) \text{ diverge.}}$

2. *Condition nécessaire de convergence:*

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_n - S_{n-1} = u_n$.
   Si la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge, alors la suite (S_n) converge vers un réel l et (S_{n-1}) converge aussi vers l, car elle est extraite de (S_n). Ainsi par différence, $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l - l$ et donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

   (b) Puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors on a $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} n \times \frac{1}{n}$, donc $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} 1$. Le terme général ne tendant pas vers 0,
   $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ diverge.}}$

   (c) Nous avons vu que la série $\sum_{n \geqslant 1} (\ln(n+1) - \ln(n))$ diverge, tandis que pour $n \geqslant 1$,
   $$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
   Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$. Autrement dit,
   $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} (\ln(n+1) - \ln(n)) \text{ diverge, bien que } \lim_{n \to +\infty} (\ln(n+1) - \ln(n)) = 0.}$

3. *Séries de Riemann:*
   Soit α un réel. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, et donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$, donc $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ est croissante}}$.

   (b) Remarquons que pour $\alpha < 0$, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$, tandis que pour $\alpha = 0$, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1$.

D'après la question 3. (a), $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge.}}$

(c) Soit $n \geqslant 1$.

- Si $\alpha \neq 1$ Calculons :

$$I_n = \int_1^{n+1} t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{-\alpha+1}+1}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1\right).$$

- Sinon, pour $\alpha = 1$, calculons : $I_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1)$.

Nous en déduisons que:

- Si $\alpha = 1$, alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty}$.
-
  - Si $\alpha \in]0,1[$, alors $\alpha - 1 < 0$, et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty}$.
  - Si $\alpha > 1$, alors $\alpha - 1 > 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = 0$, d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{\alpha-1}}$.

(d) Soit $k \geqslant 1$, par décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, nous obtenons tout d'abord :

$$\forall\, t \in [k, k+1],\ \ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha},$$

puis en intégrant bornes croissantes nous obtenons ensuite:

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k^\alpha},$$

$$\text{soit } \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

Nous sommons maintenant ces inégalités pour k allant de 1 à $k = n$ (pour $n \geqslant 1$), nous obtenons

$$\begin{array}{rcccl} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \\ S_n - 1 + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} & \leqslant & I_n & \leqslant & S_n. \end{array}$$

Nous en déduisons enfin que pour $n \geqslant 1$,

$$\boxed{I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}}.$$

(e) Pour $\alpha \in]0,1]$, on a $S_n \geqslant I_n$ avec I_n qui tend vers $+\infty$. Nous en déduisons par comparaison que la suite (S_n) tend aussi vers $+\infty$.
Pour $\alpha > 1$, on a $S_n \leqslant I_n + 1 - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$. Or $I_n + 1 - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ a une limite finie, donc en particulier est bornée, ce qui prouve que la suite (S_n) est majorée. Comme elle est de plus croissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.
Conclusion : $\boxed{\text{la série de Riemann } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$.

4. *Critère pour des séries alternées:*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante tendant vers 0 . On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0,$$

car la suite (a_n) décroît. Donc $\boxed{\text{la suite } (S_{2n}) \text{ est décroissante}}$.

(b) De même, pour $n \geqslant 1$:

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geqslant 0,$$

car la suite (a_n) décroît. Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.
Enfin, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1}$ tend vers 0 car la suite (a_n) tend vers 0 donc la suite extraite (a_{2n+1}) aussi.
Conclusion : les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite, et comme il s'agit des suites extraites paire et impaire, la suite (S_n) est convergente, *i.e.* $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n \text{ converge.}}$

(c) *Application:*

i. Nous en déduisons que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ converge}}$, car la suite $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0.

ii. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\int_0^1 x^{2k}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$.
Nous en déduisons par linéarité de l'intégrale, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x)^{2k}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Or $\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x)^{2k}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}\mathrm{d}x$ (car $-x^2 \neq 1$) et ainsi finalement :

$$\boxed{\forall\ n \geqslant 0,\ \ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x.}$$

iii. Posons $\forall\ n \geqslant 0,\ J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que pour $x \in [0,1]$ on a $1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2$, et donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$, puis $\frac{x^{2n+2}}{2} \leqslant \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leqslant x^{2n+2}$.
Par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, nous obtenons :

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{2n+2}\mathrm{d}x,$$

soit $\frac{1}{2}\frac{1}{2n+3} \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{2n+3}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$, et donc d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$.

iv. Soit $n \geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \int_0^1 \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= [\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 + (-1)^n J_n \\
&= \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_n
\end{aligned}$$

Comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n J_n = 0$ et donc par somme $\boxed{S = \frac{\pi}{4}}$.