Exercice 3. $(*)$ Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe alors f est constante.

Correction - Notons T une période de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f est T-périodique, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x+nT) = f(x)$.
Puis, on calcule les limites quand $n \to +\infty$. En notant $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, on obtient par composition de limites $f(x+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Et $f(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
Donc par unicité de la limite, $f(x) = l$, ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $\boxed{f \text{ est constante}}$.

Exercice 5. $(*)$ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ croissante.
On pose pour $x \in]a,b[$, $h(x) = \lim\limits_{t\to x_+} f(t)$.

1) Montrer que h est bien défine sur $]a,b[$.
2) Montrer que h est croissante sur $]a,b[$.

Correction -

1) Soit $x \in]a,b[$. Comme f est croissante sur $]a,b[$ alors d'après le théorème de la limite monotone sur les fonctions $\lim\limits_{x_+} f$ existe (finie ou $-\infty$). Or f est définie en x donc la limite ne peut être que finie (résultat du cours). Donc $h(x)$ existe bien. Donc $\boxed{h \text{ est définie sur }]a,b[}$.
2) Soit $(x,y) \in (]a,b[)^2$ tel que $x < y$. Posons $\delta > 0$ tel que :
$$a < x-\delta < x < x+\delta < y-\delta < y < y+\delta < b \quad \text{(possible car } a < x < y < b\text{)}.$$
Prenons alors $s \in]x-\delta, x+\delta[$ et $t \in]y-\delta, y+\delta[$. Comme $s \leqslant t$ et f est croissante alors $f(s) \leqslant f(t)$. On passe à la limite, $s \to x_+$ puis $t \to y_+$, il vient $f(x) \leqslant f(y)$. Donc $\boxed{f \text{ est croissante}}$.

Exercice 6. $(**)$ Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$.
Pour $x > 0$ $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{f(kx)}{x}$. Montrer que u converge et calculer sa limite.

Correction - Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\dfrac{f(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, posons $A > 0$ tel que :
$$\forall t \geqslant A, \quad \left|\frac{f(t)}{t} - l\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{donc} \qquad l-\varepsilon \leqslant \frac{f(t)}{t} \leqslant l+\varepsilon.$$
Soit $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $Nx \geqslant A$. On a pour $n \geqslant N$,
$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(kx)}{x} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{f(kx)}{x} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=N+1}^{n}\frac{f(kx)}{x}.$$
Dans la deuxième sommme, on écrit $\dfrac{f(kx)}{x} = k\dfrac{f(kx)}{kx}$ pour profiter des informations sur $\dfrac{f(t)}{t}$. Pour $k \geqslant N+1$, $kx \geqslant Nx \geqslant A$, donc $l - \varepsilon \leqslant \dfrac{f(kx)}{kx} \leqslant l+\varepsilon$, donc en sommant :
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=N+1}^{n} k(l-\varepsilon) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=N+1}^{n} k\frac{f(kx)}{kx} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=N+1}^{n} k(l+\varepsilon).$$
On utilise la somme usuelle $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} k = \frac{(n-N)(n+N+1)}{2}$,
$$\frac{1}{n^2}\frac{(n-N)(n+N+1)}{2}(l-\varepsilon) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=N+1}^{n}\frac{f(kx)}{x} \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{(n-N)(n+N+1)}{2}(l+\varepsilon).(*)$$
Comme $\dfrac{1}{n^2}\dfrac{(n-N)(n+N+1)}{2}(l+\varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{l+\varepsilon}{2} = \dfrac{l}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\dfrac{1}{n^2}\dfrac{(n-N)(n+N+1)}{2}(l-\varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{l-\varepsilon}{2} = \dfrac{l}{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}$ posons alors N' tel que :
$$\forall n \geqslant N', \quad \frac{1}{n^2}\frac{(n-N)(n+N+1)}{2}(l+\varepsilon) \leqslant \frac{l}{2}+\varepsilon \qquad \frac{1}{n^2}\frac{(n-N)(n+N+1)}{2}(l+\varepsilon) \geqslant \frac{l}{2}-\varepsilon.$$

On combine avec $(*)$, pour $n \geqslant \max(N, N')$,

$$\frac{l}{2} - \varepsilon \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=N+1}^{n} \frac{f(kx)}{x} \leqslant \frac{l}{2} + \varepsilon. \ (**)$$

Enfin la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{f(kx)}{x}$ est finie (indépendante de n) donc $\displaystyle\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{f(kx)}{x} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc posons N'', tel que :

$$\forall n \geqslant N'', \qquad -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{f(kx)}{x} \leqslant +\varepsilon.$$

On additionne $(**)$, il vient,

$$\forall n \geqslant \max(N, N', N''), \qquad \frac{l}{2} - 2\varepsilon \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(kx)}{x} \leqslant \frac{l}{2} + 2\varepsilon \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |u_n - \frac{l}{2}| \leqslant 2\varepsilon.$$

On reconnaît donc la définition de la limite (quitte à prendre $\frac{\varepsilon}{2}$ à la place de ε depuis le début), donc $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{l}{2}}$.

Exercice 9. ($\heartsuit$) Soit $x > 0$. On pose pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(t) = (\sin t)^x$.
Montrer que f est prolongeble par continuité en 0.

Correction - Soit $x > 0$. Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(t) = \mathrm{e}^{x \ln(\sin t)}$.
Par opérations sur les limites [...], $f(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc, f est prolongeable par continuité, en posant $f(0) = 0$.

Exercice 11. $(*)$ Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Correction - Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors posons (r_n) une suite de rationnels telle que $r_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Alors $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1 \to 1 \neq 0 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a)$ donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en a.
- Si $a \in \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors posons (s_n) une suite d'irrationnels telle que $s_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Alors $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(s_n) = 0 \to 0 \neq 1 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a)$ donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en a.

Conséquence : $\boxed{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \text{ n'est continue en aucun point de } \mathbb{R}}$.

Exercice 12. $(**)$ Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + \frac{1}{2} - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$.
Montrer que f est bijective (on pourra calculer $f \circ f$. Montrer que f n'est continue en aucun point.

Correction -

- Montrons que f est bijective. Soit $x \in [0, 1]$.
  Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$.
  Si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x + \frac{1}{2} - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor)$. Or $x + \frac{1}{2} - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \notin \mathbb{Q}$ car $x \notin \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ et $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Donc

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= (x + \frac{1}{2} - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor) + \frac{1}{2} - \lfloor (x + \frac{1}{2} - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor) + \frac{1}{2} \rfloor \\ &= x + 1 - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor - \left\lfloor x + 1 - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \right\rfloor \\ &= x + 1 - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor - \left(\lfloor x \rfloor + 1 - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \right) \\ &= x - \lfloor x \rfloor = x \text{ car } x \in [0, 1[\end{aligned}$$

  Donc $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ donc d'après le théorème de caractérisation des bijections, $\boxed{f \text{ est bijective}}$.
- Montrons que f n'est continue en aucun point. Soit $a \in [0, 1]$.
  Si $a \notin \mathbb{Q}$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, posons (r_n) une suite de rationnels telle que $r_n \to a$. Alors $f(r_n) = r_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
  Or, $f(a) = a + \frac{1}{2} - \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor \neq a$ (car sinon on aurait $\frac{1}{2} - \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor = 0$ c'est-à-dire $\lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{1}{2}$, impossible une partie entière est entière).
  Si $a \in \mathbb{Q}$, comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, posons (s_n) une suite d'irrationnels telle que $s_n \to a$. Alors $f(s_n) = s_n + \frac{1}{2} - \lfloor s_n + \frac{1}{2} \rfloor$.
  Par l'absurde, supposons $f(s_n) \to f(a) = a$, alors $s_n + \frac{1}{2} - \lfloor s_n + \frac{1}{2} \rfloor \to a$. Alors :

$$\lfloor s_n + \frac{1}{2} \rfloor = -(s_n + \frac{1}{2} - \lfloor s_n + \frac{1}{2} \rfloor) + (s_n + \frac{1}{2}) \to \frac{1}{2}.$$

  Ce qui est absurde, car $\lfloor s_n + \frac{1}{2} \rfloor$ est une suite d'entiers.
  Dans les deux cas, on a prouvé que $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } a}$.

Exercice 17. $(*)$ Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeur est constante.

Correction - Par contraposée, supposons que f n'est pas constante. Posons alors deux valeurs différentes A et B prises par la fonction f en a et b respectivement ($a < b$). Comme f est continue, d'après le TVI, pour tout y compris entre A et B il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$. Donc f prend toutes les valeurs comprises entre A et B donc une infinité de valeurs.
Donc, par contraposée, $\boxed{\text{si } f \text{ prend un nombre fini de valeurs alors } f \text{ est constante.}}$

Exercice 19. $(*)$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
Montrer que $m = \inf f$ existe et que m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Correction - Par définition de la limite, posons $A < 0$ et $B > 0$ tel que :

$$\forall x \leqslant A, \quad f(x) \geqslant 0 \qquad\qquad \forall x \geqslant B, \quad f(x) \geqslant 0.$$

Sur $]-\infty, A]$ et sur $[B, +\infty[$, f est minorée par 0. Et sur le segment $[A, B]$, f est continue donc est bornée (théorème de l'image d'un segment par une fonction continue). Donc, globalement, sur $\mathbb{R}$, f est minorée donc d'après le théorème de la borne supérieure, $\boxed{m = \inf f \text{ existe}}$.
On reprend les définitions, posons $A' < 0$ et $B' > 0$ tel que :

$$\forall x \leqslant A', \quad f(x) \geqslant m + 1 \qquad\qquad \forall x \geqslant B', \quad f(x) \geqslant m + 1.$$

On a donc $\inf\limits_{]-\infty, A'] \cup [B', +\infty[} f > m$. Donc $\inf\limits_{[A', B']} f = m$ et cette borne inférieure est atteinte car f est continue sur le segment $[A', B']$.
Conclusion, $\boxed{m \text{ est le minimum de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 22. $(*)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1) Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2) Étudier la monotonie de la suite u. En déduire la convergence.
3) Déterminer la limite de la suite.

Correction -

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est continue sur l'intervalle $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]0, 1[$ (somme de fonctions strictement croissantes). Donc f_n réalise une bijection de $]0, 1[$ vers $]f(0), f(1)[=] - 1, n - 1[$. Or $0 \in] - 1, n - 1[$ donc 0 admet un unique antécédent note u_n.
$\boxed{\text{Il existe donc un unique réel } u_n \in]0, 1[\text{ tel que } f_n(u_n) = 0}$.
2) Pour $x \in]0, 1[$, $f_{n+1}(x) = x^{n+1} + f_n(x) > f_n(x)$. Avec $x = u_n$, $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
Comme f_{n+1} est strictement croissante, $u_n > u_{n+1}$ donc u est décroissante. De plus, u est minorée par 0 (car à valeurs dans $]0, 1[$) donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{u \text{ converge}}$. Notons l la limite.
3) Notons que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant u_0 < 1$ donc par passage à la limite $l < 1$.
On reconnaît une somme géométrique, pour $x \in]0, 1[$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k - 2 = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2 \quad \text{donc} \quad \frac{1 - u_n^{n+1}}{1 - u_n} - 2 = 0. \ (*)$$

Or $0 \leqslant u_n \leqslant u_0$ donc $0 \leqslant u_n^{n+1} \leqslant u_0^{n+1}$. Or $u_0 \in]0, 1[$, donc $u_0^{n+1} \to 0$ donc par le théorème des gendarmes $u_n^{n+1} \to 0$. Donc en passant à la limite $(*)$, $\dfrac{1}{1 - l} = 2$ donc $\boxed{l = \dfrac{1}{2}}$.

Exercice 23. $(*)$ Déterminer suivant le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^{\lambda x} = x$ (E).

Correction - On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions dérivables avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{\lambda x} - 1$.

- Si $\lambda \leqslant 0$, alors $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus est continue sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (le calcul des limites est laissé au lecteur...). Or $0 \in \mathbb{R}$ donc 0 admet un unique antécédent par f donc l'équation (E) admet une unique solution.
- Si $\lambda > 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \lambda \, \mathrm{e}^{\lambda x} > 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda)$.

On note $x_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda)$ alors $f(x_\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}(1 + \ln \lambda)$.

x	$-\infty$		x_λ		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\lambda}(1 + \ln \lambda)$	$\nearrow$	$+\infty$

On étudie le signe de $\frac{1}{\lambda}(1 + \ln \lambda) \begin{cases} > 0 & \text{si } \lambda > \mathrm{e}^{-1} \\ = 0 & \text{si } \lambda = \mathrm{e}^{-1} \\ < 0 & \text{si } \lambda < \mathrm{e}^{-1} \end{cases}$.

Trois cas :

- Si $\lambda > \mathrm{e}^{-1}$, la fonction f ne s'annule pas.
- Si $\lambda = \mathrm{e}^{-1}$, la fonction ne s'annule qu'en x_λ.
- Si $\lambda < \mathrm{e}^{-1}$, en appliquant deux fois le TBM, sur $]-\infty, x_\lambda[$ et $]x_\lambda, +\infty[$, la fonction s'annule deux fois.

Conclusion : $\boxed{\text{l'équation a } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \text{ solutions si } \begin{cases} \lambda > \mathrm{e}^{-1} \\ \lambda \leqslant 0 \text{ ou } \lambda = \mathrm{e}^{-1} \\ 0 < \lambda < \mathrm{e}^{-1} \end{cases}}$.

Exercice 24. $(*)$ Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, continues en 1 et telle que

$$\forall x > 0,\ \ f(x^2) = f(x).\ (*).$$

Correction - Analyse.. Soit f solution du problème. Soit $x > 0$. Alors, avec $\sqrt{x}$ à la place de x dans $(*)$, $f(x) = f(\sqrt{x})$. On itère,

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = f(x^{\frac{1}{8}}) = \cdots = f(x^{\frac{1}{2^n}}) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

(ce que l'on peut prouver par récurrence). Or $x^{\frac{1}{2^n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2^n}\ln x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Comme f est continue en 1 alors $f(x^{\frac{1}{2^n}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$.
Par ailleurs, $f(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Par unicité de la limite, $f(x) = f(1)$. Donc f est constante.
Synthèse. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ constante. On pose $C \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall x > 0$, $f(x) = C$. Alors, f est continue en 1 et pour tout $x > 0$, $f(x^2) = C = f(x)$.
Conclusion. $\boxed{\text{L'ensemble des fonctions cherchées est l'ensemble des fonctions constantes sur } \mathbb{R}_+^*}$.

Exercice 25. $(**)$ On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = x$.

1) Montrer que f est injective. En déduire que f est strictement croissante.
2) En déduire que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Correction - Analyse. Soit f solution du problème.

1) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = x$, alors $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ alors d'après le théorème de caarctérisation des applications bijectives, f est bijective donc $\boxed{f \text{ est injective}}$. Par conséquent comme f est continue sur $\mathbb{R}$, alors par un théorème du cours, $\boxed{f \text{ est strictement croissante}}$.
2) Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$.
Si $f(x) < x$ alors comme f est strictement croissante, $f(f(x)) < f(x)$ donc $x < f(x)$, absurde.
Si $f(x) > x$ alors comme f est strictement croissante, $f(f(x)) > f(x)$ donc $x > f(x)$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
Synthèse. La fonction $x \mapsto x$ vérifie bien les conditions du problème.
Conclusion. $\boxed{\text{L'unique solution du problème est l'application } x \mapsto x}$.

Exercice 28. $(**)$Autre démo du TVI
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.
Prenons y compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer : $\exists c \in [a, b]\ /\ y = f(c)$.
On pourra poser l'ensemble $A = \{x \in [a, b]\ /\ f(x) \leqslant y\}$, montrer qu'il admet une borne supérieure puis utiliser la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Correction - L'ensemble A est inclus dans $[a, b]$ il est donc majoré (par b). De plus il est non vide car contient a ($f(a) \leqslant y$). Donc A admet une borne supérieure notée c.
Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, posons (x_n) une suite d'éléments de A telle que $x_n \to c$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leqslant y$.
D'une part, par caractérisation séquentielle de la continuité de f, $f(x_n) \to f(c)$, on passe donc à la limite l'inégalité ci dessus, $f(c) \leqslant y$.
Si $c = b$, alors comme $y \leqslant f(b) = f(c)$, avec l'autre inégalité, $y == f(c)$.
Si $c < b$ alors pour n assez grand $c + \frac{1}{n} \in [a, b]$ mais n'appartient pas à A car c est la borne supérieure de A, donc $f(c + \frac{1}{n}) > y$. On passe de nouveau à la limite, $f(c) \geqslant y$. Avec l'autre inégalité, on a bien $f(c) = y$.

Exercice 29. $(***)$ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ surjective. Montrer que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ admet une infinité de solutions pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Correction - Par l'absurde supposons qu'il y ait un nombre fini de solutions : $x_1, \ldots, x_n$. Sans perte de généralité, on peut supposer $x_1 < \ldots < x_n$.

Exercice 30. $(***)$ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ surjective.

1) -a- On suppose que $f(x+1) - f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

   -b- En déduire que s'il existe $a > 0$ et $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+a) - f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{l}{a}$.

2) On suppose que pour tous $x > 0$ et $y > 0$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.
   Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $xf(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Correction -