Divisibilité

Exercice 1. (♡) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 2. (♡) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes

1) $x-3|x+7$
2) $x+2|x^2+2$

Exercice 3. (♡) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes

1) $xy = 3x + 4y$
2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$
3) $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$.

Exercice 4. (∗) Soit $(a, b, n) \in (\mathbb{N}^*)^3$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b. Déterminez le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 5. (♡) Montrer que

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ 17 \mid 7^{8n+1} + 10(-1)^n$
3) $\forall n \in \mathbb{N},\ 9 \mid 2^{2n} + 15n - 1$.

Exercice 6. (∗) Montrer que dans la suite (u_n) de terme général $u_n = 2^n - 3$, il y a:

1) une infinité de termes divisibles par 5
2) une infinité de termes divisibles par 13
3) aucun terme divisible par 65.

Exercice 7. (∗) Montrer que le produit de k entiers consécutifs est divisible par $k!$.

PGCD-PPCM

Exercice 8. (♡) Déterminer le PGCD de a et b et étalissez une relation de Bezout dans les cas suivants

1) $a = 39$ et $b = 15$
2) $a = 41$ et $b = 23$
3) $a = 195$ et $b = 105$

Exercice 9. (♡) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer

1) $(2n+4) \wedge (3n+3)$
2) $(n^2+n) \wedge (2n+1)$

Exercice 10. (∗) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes

1) $\begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 60 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + y = 100 \\ x \wedge y = 10 \end{cases}$

Exercice 11. (∗) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $11(x \wedge y) + (x \vee y) = 203$.

Entiers premiers entre eux

Exercice 12. (∗) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge bc = a \wedge c$.

Exercice 13. (♡) Soient a et b deux nombres premiers entre eux.

1) Montrer que $a \wedge (a+b) = b \wedge (a+b) = 1$.
2) En déduire que $(a+b) \wedge ab = 1$.

Exercice 14. (♡) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes

1) $41x + 23y = 5$
2) $39x + 15y = 7$

Exercice 15. (∗) Soient a et b deux entiers non nuls premiers entre eux et un couple de Bezout $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au_0 + bv_0 = 1$.

1) Déterminer les tous les couples d'entiers $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au+bv=1$.

2) Si $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe deux entiers $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au+bv=1$ et $\begin{cases} |u| \leqslant b \\ |v| \leqslant a \end{cases}$.

Exercice 16. $(*)$

1) Montrer qu'il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

2) Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 17. $(*)$ L'équation $x^3+x^2+2x+1=0$ admet-elle des solutions rationnelles?

Nombres premiers

Exercice 18. $(\heartsuit)$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\dfrac{1}{4}(n^3+(n+2)^3)$ n'est pas premier.

Exercice 19. $(\heartsuit)$

1) Soit $(a,d,n) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Montrer que si d divise n alors a^d-1 divise a^n-1.

2) Soit $m \in \mathbb{N}$. En déduire que si 2^m-1 est premier alors m est premier.

Exercice 20. $(*)$ Déterminer les nombres premiers p tels que p^2+2 soit lui-même premier.

Exercice 21. $(\heartsuit)$

1) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que l'intervalle d'entiers $[\![n!+2, n!+n]\!]$ ne contient aucun nombre premier.

2) Montrer qu'il existe des intervalles d'entiers aussi long que l'on veut ne contenant pas de nombre premier.

Exercice 22. $(**)$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p_n le n-ième nombre premier.

1) Montrer que $p_{n+1} \leqslant p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

2) En déduire que $p_n \leqslant 2^{2^n}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Démontrer que pour x assez grand :
$$\ln(\ln(x)) \leqslant \pi(x) \leqslant x.$$

Congruences

Exercice 23. $(**)$ Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (n+1)^p - (n^p+1) \equiv 0 \ [2p].$$

Exercice 24. $(*)$Restes chinois

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système $\begin{cases} x \equiv 7 \ [8] \\ x \equiv 1 \ [13] \end{cases}$.

2) Cas général. Soient deux entiers n_1 et n_2 premiers entre eux. Pour tout $(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2$, montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} x \equiv a_1 \ [n_1] \\ x \equiv a_2 \ [n_2] \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv p \ [n_1 n_2]$.