

## DS n° 4 de Physique-Chimie

Durée : 3h  
*Calculatrice autorisée*

### 1 Production de trioxyde de soufre

L'acide sulfurique est un produit industriel de première importance, qui trouve de très nombreuses applications, notamment dans les batteries au plomb pour les voitures et autres véhicules, le traitement des minerais, la fabrication des engrais, le raffinage du pétrole, le traitement des eaux usées et les synthèses chimiques. L'acide sulfurique est produit industriellement par hydratation du trioxyde de soufre.

Le trioxyde de soufre est obtenu par oxydation du dioxyde de soufre en phase gaz, selon la réaction équilibrée ci-dessous :



La constante d'équilibre de cette réaction à 750 K est  $K = 10050$ . Les réactifs sont introduits en proportion stœchiométriques, dans un réacteur à pression constante  $P = 2$  bar et maintenu à 750 K. On note  $\tau = \frac{\xi}{\xi_{\max}}$  le taux d'avancement de la réaction.

Donnée :  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

1. Justifier que la réaction (1) conduit nécessairement à un équilibre chimique.
2. Établir l'équation vérifiée par  $\tau$  à l'équilibre.
3. Est-il préférable de réaliser l'oxydation du dioxyde de soufre à haute ou basse pression ? Justifier.
4. Écrire un programme python pour calculer  $\tau$  à l'équilibre par dichotomie, à  $10^{-15}$  près. Le résultat du programme n'est pas attendu.
5. En supposant la réaction quasi-totale, calculer  $\varepsilon = 1 - \tau$  à l'équilibre. Conclure.
6. En déduire le volume occupé par le mélange gazeux à l'équilibre, pour 100 mol de  $\text{SO}_2$  à l'état initial.
7. Partant d'un état d'équilibre, on ajoute au mélange, du diazote  $\text{N}_2$ , qui se comporte comme un gaz inerte. Dans quel sens de la réaction (1), le système évolue-t-il ?

## 2 Étude d'un résonateur à quartz

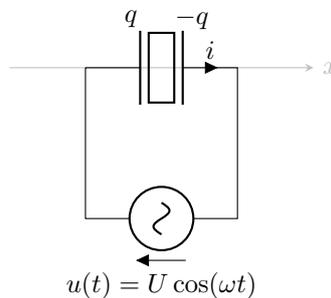
Le quartz est un cristal de silice, qui présente des propriétés physiques très intéressantes : la piézo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal (c'est l'effet piézo-électrique). Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'effet piézo-électrique inverse). Cette propriété permet de réaliser des oscillateurs, très stables dans le temps, utilisés par exemple dans les montres à quartz.



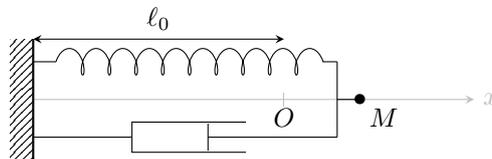
Un diapason de quartz de montre

### 2.1 Modélisation d'un résonateur à quartz

On considère un cristal de quartz de forme parallélépipédique. Des électrodes métalliques (en or généralement) sont déposées sur chacune des faces du quartz (on suppose que ces faces sont totalement métallisées). On parle d'électrodes de connexion. On a ainsi réalisé un condensateur plan.



D'un point de vue mécanique, le quartz peut être modélisé par un système masse-ressort amorti.



La position  $x$  du point matériel  $M$ , de masse équivalente  $m$ , par rapport à sa position d'équilibre  $O$  représente l'allongement du cristal de quartz. La raideur  $k$  a pour origine la rigidité du matériau. La force de frottement  $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$  rend compte de la dissipation d'énergie dans le matériau. Enfin l'effet piézo-électrique inverse se manifeste par une force  $\vec{F}_{pe} = \beta u(t)\vec{u}_x$ . Le poids est négligé.

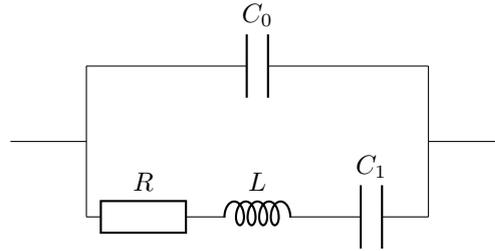
8. Établir l'expression de la représentation complexe  $\underline{x}(t)$  de  $x(t)$ , en régime sinusoïdal forcé, en fonction de  $\underline{u}(t)$ ,  $m$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $j\omega$ .

D'un point de vue électrique, la charge totale  $q$  apparaissant sur les électrodes du condensateur a deux origines :  $q = q_0 + q_1$ , où

- la charge  $q_0$  est la charge due à la capacité  $C_0$  du condensateur plan
- la charge  $q_1 = \gamma x$  est due à l'effet piézo-électrique.

9. Exprimer  $q_0$  en fonction de  $u$  et  $C_0$ .

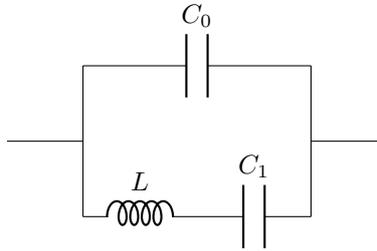
10. Exprimer  $i(t)$  en fonction de  $q(t)$ . En déduire  $\underline{i}(t)$  la représentation complexe de  $i(t)$  en régime sinusoïdal forcé, en fonction de  $\underline{u}(t)$ ,  $C_0$ ,  $m$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $j\omega$ .
11. Montrer que d'un point de vue électrique le quartz est équivalent à l'association suivante.



Exprimer  $R$ ,  $L$  et  $C_1$ , en fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

## 2.2 Étude de l'impédance équivalente du quartz

On étudie l'impédance d'un quartz pouvant être utilisé dans une montre à quartz. Dans un premier temps, on néglige la résistance  $R$  du quartz. Le quartz est alors équivalent au dipôle suivant.

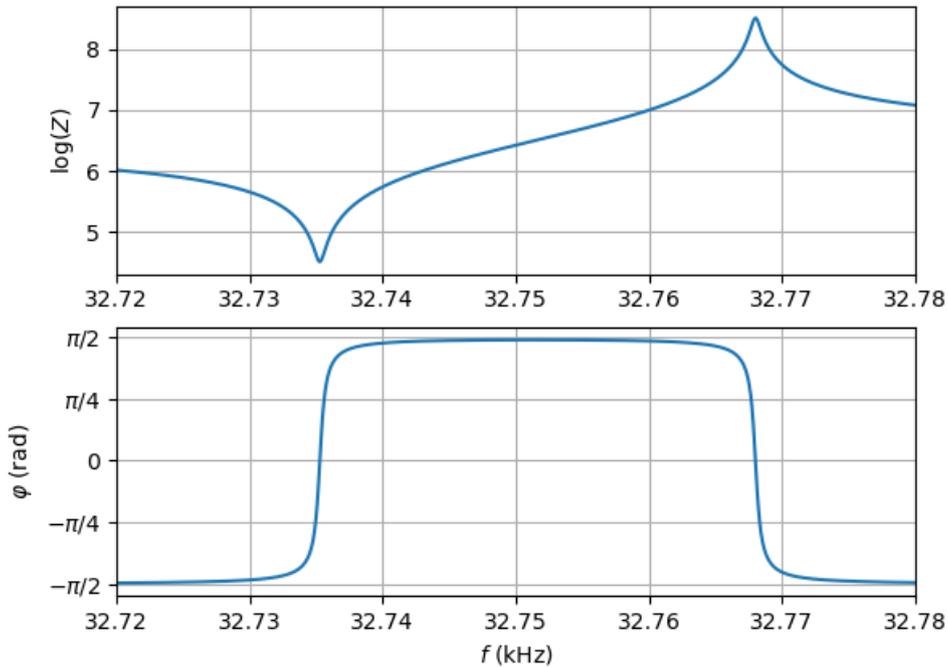


12. Montrer que l'impédance équivalente  $\underline{Z}$  du quartz se met sous la forme

$$\underline{Z} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}}{jC_{\text{éq}}\omega(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2})}$$

où  $C_{\text{éq}}$ ,  $\omega_s$  et  $\omega_p$  sont des constantes que l'on exprimera en fonction  $L$ ,  $C_0$  et  $C_1$ .

On a tracé ci-dessous les graphes de  $\log(Z) = \log(|Z|)$  et  $\varphi = \arg(\underline{Z})$ , en fonction de la fréquence  $f$ .



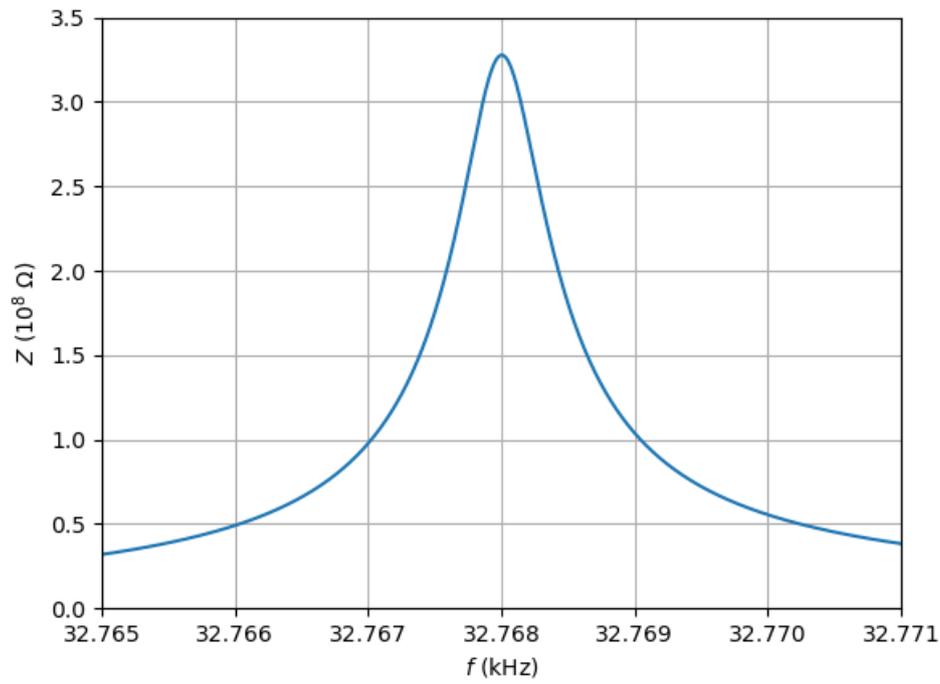
13. Préciser si le quartz a un comportement capacitif ou inductif selon la valeur de  $f$ .
14. Déterminer les valeurs de  $\omega_s$  et  $\omega_p$ .

15. La capacité du condensateur plan formé par les deux armatures vaut  $C_0 = 1,5 \text{ pF}$ . Déterminer les valeurs de  $C_1$  et  $L$ .

Au voisinage de la résonance, en tenant compte de la résistance  $R$  du quartz, l'impédance du quartz se met sous la forme :

$$\underline{Z} \approx \frac{Z_{\max}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)}$$

où  $Q = \frac{L\omega_p}{R}$ . On a représenté le graphe de  $Z = |\underline{Z}|$  en fonction de la fréquence  $f$ , au voisinage de la résonance.



16. Établir l'expression de la largeur  $\Delta\omega$  du pic à  $\frac{Z_{\max}}{\sqrt{2}}$  en fonction de  $\omega_p$  et  $Q$ .
17. En déduire la valeur de  $R$ .

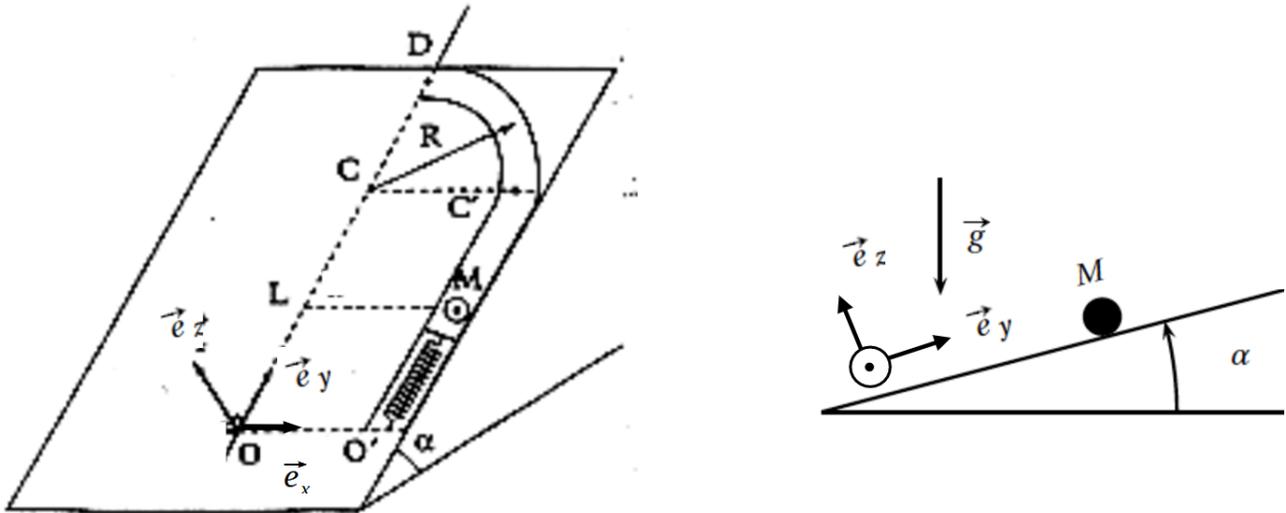
### 2.3 Principe d'une montre à quartz

Une horloge est composée d'un oscillateur plus ou moins stable dans le temps et d'un système de comptage des oscillations. Le quartz d'une montre permet de réaliser un oscillateur à la fréquence 32768 Hz. Cela signifie que 32768 fois par seconde une impulsion électrique est émise par le circuit oscillant. Un dispositif électrique doit compter les impulsions. Ces compteurs fonctionnent dans la technologie binaire (suite de 0 et de 1). Une impulsion électrique correspond à la valeur 1. La valeur 0 correspond à aucun signal électrique. Un compteur modulo 2 délivre une impulsion de sortie dès qu'il a compté 2 impulsions à son entrée.

18. Combien de compteurs modulo 2 faut-il mettre en cascade pour commander le chiffre des secondes ?

### 3 Mouvements d'une boule de flipper

On modélise un flipper comme un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. On y étudie le mouvement d'une boule de masse  $m$  assimilée à un point matériel  $M$ ; on désignera par  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur, considérée uniforme. La boule est lancée par un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , et se déplace sans frottement (sauf dans la question 26) tout d'abord à l'intérieur d'une gouttière rectiligne d'axe  $O'y$  et de longueur  $O'C' = OC = L$ , puis à partir du point  $C'$  dans une gouttière formant un quart de cercle de centre  $C$ , de rayon  $R = CC' = CD = OO'$  entre les points  $C'$  et  $D$  et enfin sur le plan  $(Ox, Oy)$ .



Données :

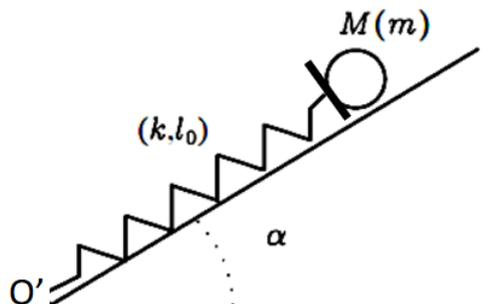
- masse de la bille  $m = 100 \text{ g}$
- accélération de la pesanteur  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$
- inclinaison du plan  $\alpha = 10^\circ$
- raideur du ressort  $k = 40 \text{ N/m}$
- longueur à vide du ressort  $\ell_0 = 12 \text{ cm}$
- longueur de la portion de gouttière rectiligne  $L = OC = 80 \text{ cm}$
- rayon du guide circulaire  $R = 20 \text{ cm}$

#### 3.1 Questions préliminaires

19. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}$  du point  $M$ , en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $y$  et  $\alpha$ ; on choisira comme origine de l'énergie potentielle le point  $O'$ .
20. Montrer que la force de rappel d'un ressort est conservative et établir l'expression de l'énergie potentielle élastique  $E_{pe}$  d'un ressort en fonction de la longueur  $\ell$  du ressort,  $k$  et  $\ell_0$ .

#### 3.2 Propulsion

Initialement la boule est en contact avec un petit plateau de masse négligeable accroché à l'extrémité supérieure du ressort. L'extrémité inférieure du ressort est accrochée au point fixe  $O'$ . Tant que la boule est dans la gouttière rectiligne, on repère sa position par sa coordonnée  $y = O'M$ .



21. On étudie dans un premier temps l'équilibre de la boule qui repose sur le plateau. Etablir l'expression de la position d'équilibre  $y_{\text{éq}}$  de la boule. Calculer la valeur de  $y_{\text{éq}}$ .

Pour propulser la boule, le joueur actionne une tirette, comprimant ainsi le ressort de telle sorte que la boule se trouve au point  $M_i$  tel que  $y = y_i = 2,7 \text{ cm}$  ( $< y_{\text{éq}}$ ) puis il lâche la tirette à l'instant  $t = 0$ , provoquant la détente du ressort et la mise en mouvement de la boule.

22. En étudiant le système {boule + plateau}, établir la loi horaire  $y(t)$  de la boule, tant qu'elle reste en contact avec le plateau.
23. Montrer que la boule décolle du plateau en  $y = \ell_0$  et déterminer l'expression de la vitesse  $v_0$  de la boule lorsqu'elle décolle du plateau.
24. Retrouver l'expression de  $v_0$  par une approche énergétique. Calculer la valeur de  $v_0$ .

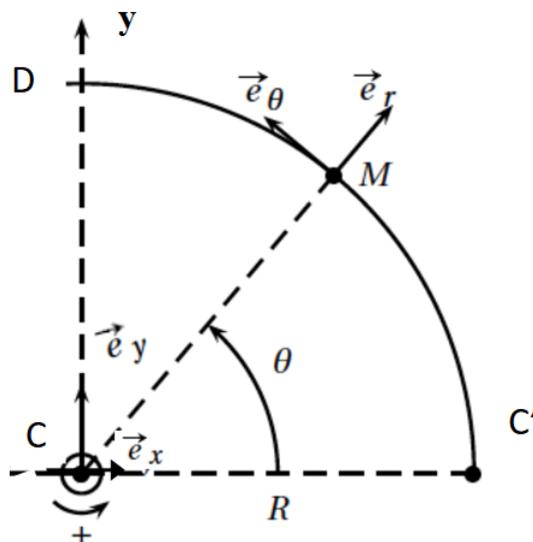
### 3.3 Mouvement entre $M_0$ et $C'$

On étudie à présent le mouvement de la boule dans le guide rectiligne, entre le point  $M_0$ , où la boule décolle du plateau avec une vitesse  $v_0$ , et  $C'$ .

25. Établir l'expression de la valeur minimale  $v_{0\text{min}}$  de la vitesse  $v_0$  pour que la boule puisse atteindre le point  $C'$ . Calculer  $v_{0\text{min}}$ .
26. On constate en réalité que pour la valeur  $v_{0\text{min}}$  déterminée dans la question précédente, la boule n'atteint pas le point  $C'$  : sa vitesse s'annule en un point  $C_{\text{max}}$  situé en  $y_{\text{max}} = 0,9 L$ . Dans cette question seulement, on prend alors en compte l'existence de frottements solide entre la boule et la gouttière. On modélise les frottements par une réaction tangentielle  $\vec{R}_t$ , opposée au mouvement, de norme  $R_t = fR_n$ , où  $R_n$  est la norme de la réaction normale de la gouttière sur la boule et  $f$  un coefficient de frottement. Déterminer la valeur de  $f$ .

### 3.4 Mouvement entre $C'$ et $D$

La boule est astreinte à se déplacer dans la gouttière circulaire de centre  $C$ . On repère sa position dans la portion circulaire par l'angle  $\theta = (\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{CM})$ .



27. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par  $\theta(t)$ , ainsi que l'expression de la réaction normale  $\vec{R}_n$  de la gouttière sur la boule, lorsqu'elle se trouve dans la portion circulaire. On ne cherchera pas à résoudre l'équation différentielle.

### 3.5 Trajectoire après la sortie du guide circulaire

On suppose que la boule atteint le point  $D$  avec une vitesse  $\vec{v}_D = -v_D \vec{e}_x$ , à un instant choisi comme nouvelle origine du temps.

28. Établir les lois horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  caractérisant le mouvement de la boule après  $D$ .
29. Déterminer la valeur de  $v_D$  pour atteindre le point  $E$  de coordonnées  $x = -R$ ,  $y = R$ .

## Correction du DS n° 4

### 1 Production de trioxyde de soufre

1.  $Q_r = \frac{P_{\text{SO}_3}^2 P^\circ}{P_{\text{SO}_2}^2 P_{\text{O}_2}}$

Si la réaction est totale, alors le réactif limitant est entièrement consommé, d'où  $P_{\text{SO}_2}$  ou  $P_{\text{O}_2} = 0$ . Or dans ce cas,  $Q_r \rightarrow +\infty$ , donc  $Q_r$  atteint nécessairement  $K$  : l'état final est un équilibre chimique.

2.  $\xi_{\text{max}} = n$

état	2SO <sub>2</sub>	+ O <sub>2</sub>	= 2SO <sub>3</sub>	gaz
initial	2n	n	0	3n
final	2n - 2x	n - x	2x	3n - x
	= 2n(1 - τ)	n(1 - τ)	2nτ	n(3 - τ)

$P_{\text{SO}_2} = x_{\text{SO}_2} P = \frac{2(1-\tau)}{3-\tau} P$ ,  $P_{\text{O}_2} = x_{\text{O}_2} P = \frac{(1-\tau)}{3-\tau} P$  et  $P_{\text{SO}_3} = x_{\text{SO}_3} P = \frac{2\tau}{3-\tau} P$

D'après la loi d'action de masse,  $Q_{r\text{éq}} = \frac{(2\tau)^2(3-\tau)P^\circ}{[2(1-\tau)]^2(1-\tau)P} = K$ , soit  $\frac{\tau^2(3-\tau)}{2(1-\tau)^3} = 10050$

3. A l'équilibre,  $Q_r = \frac{(2\tau)^2(3-\tau)P^\circ}{[2(1-\tau)]^2(1-\tau)P} = K$

Si  $P$  augmente, alors  $Q_r$  diminue, donc pour compenser  $\tau$  doit augmenter. Ainsi il est préférable de réaliser la réaction à haute pression.

4. **def** `Qr(t)`:

```

    return t**2*(3-t)/(1-t)**3/2
K=10050
a=0
b=1
while b-a>1e-15:
    m=(a+b)/2
    if Qr(m)<=K:
        a=m
    else:
        b=m
print(m)

```

5. On suppose la réaction quasi-totale, c'est-à-dire  $\xi \approx n$ , c'est-à-dire  $\tau \approx 1$ .

D'après la loi d'action de masse :  $\frac{2P^\circ}{\varepsilon^3 P} \approx K$ , d'où  $\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{2P^\circ}{KP}} = 0,046$

$\varepsilon \ll 1$  donc l'hypothèse est validée. On en déduit  $\tau = 1 - \varepsilon = 0,954$

6.  $PV = (3n - \xi)RT$  avec  $n = \frac{100}{2}$  mol et  $\xi \approx n$ , d'où  $V \approx \frac{2nRT}{P} = 3,11 \text{ m}^3$

7.  $Q_r = \frac{x_{\text{SO}_3}^2 P^\circ}{x_{\text{SO}_2}^2 x_{\text{O}_2} P} = \frac{n_{\text{SO}_3}^2 n_{\text{gaz}} P^\circ}{n_{\text{SO}_2}^2 n_{\text{O}_2} P}$

Partant d'un équilibre chimique,  $Q_r = K$ . Lorsqu'on ajoute du diazote,  $n_{\text{gaz}}$  augmente, donc  $Q_r > K$ . Ainsi la réaction a lieu dans le sens indirect.

## 2 Étude d'un résonateur à quartz

### 2.1 Modélisation d'un résonateur à quartz

8. On applique le principe fondamental de la dynamique au point matériel  $M$  :  $m\vec{a} = \vec{F}_r + \vec{f} + \vec{F}_{pe}$ , d'où  $m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + \beta u$ , soit  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = \beta u$   
 En régime sinusoïdal forcé,  $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$  vérifie l'équation différentielle complexe associée :

$$m\underline{\ddot{x}} + \alpha\underline{\dot{x}} + k\underline{x} = \beta\underline{u} \text{ d'où } \underline{x} = \frac{\beta\underline{u}}{-m\omega^2 + j\omega\alpha + k}$$

9.  $q_0 = C_0 u$

10.  $i = \frac{dq}{dt}$  donc  $\underline{i} = j\omega\underline{q} = j\omega(\underline{q}_0 + \underline{q}_1)$  et  $\underline{q}_1 = \gamma\underline{x} = \frac{\gamma\beta\underline{u}}{-m\omega^2 + j\omega\alpha + k}$

donc  $\underline{i} = \left( j\omega C_0 + \frac{\gamma\beta}{j m \omega + \alpha + \frac{k}{j\omega}} \right) \underline{u}$

11. Le quartz est donc équivalent à une admittance  $\underline{Y} = j\omega C_0 + \frac{1}{j \frac{m}{\beta\gamma}\omega + \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{k}{j\omega\beta\gamma}}$ . C'est bien l'admittance de l'association d'une capacité  $C_0$  en parallèle avec une association série de 3 impédances  $\frac{\alpha}{\beta\gamma}$ ,  $j \frac{m}{\beta\gamma}\omega$  et  $\frac{k}{j\omega\beta\gamma}$ , c'est-à-dire une résistance  $\boxed{R = \frac{\alpha}{\beta\gamma}}$ , une inductance  $\boxed{L = \frac{m}{\beta\gamma}}$  et une capacité  $\boxed{C_1 = \frac{\beta\gamma}{k}}$ .

### 2.2 Étude de l'impédance équivalente du quartz

12.  $\underline{Z} = \frac{1}{jC_0\omega} \parallel \left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right)$

donc  $\underline{Z} = jC_0\omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1 + \frac{C_0}{C_1} - LC_0\omega^2}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = jC_1\omega \frac{1 + \frac{C_0}{C_1} - LC_0\omega^2}{1 - LC_1\omega^2} = j(C_0 + C_1)\omega \frac{1 - L \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} \omega^2}{1 - LC_1\omega^2}$

On identifie :  $\boxed{C_{\text{éq}} = C_0 + C_1, \omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} \text{ et } \omega_p = \sqrt{\frac{C_0 + C_1}{LC_0 C_1}}}$

13. Pour  $f < 32,735$  kHz et  $f > 32,768$  kHz,  $\arg(\underline{Z}) = -\frac{\pi}{2}$  donc  $\underline{Z} = -jX = \frac{1}{jC\omega}$  : le quartz a un comportement capacitif.  
 Pour  $32,735$  Hz  $< f < 32,768$  Hz,  $\arg(\underline{Z}) = +\frac{\pi}{2}$  donc  $\underline{Z} = jL\omega$  : le quartz a un comportement inductif.

14.  $\omega_p = \omega_s \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_0}}$  donc  $\omega_p > \omega_s$ .

De plus, d'après l'expression de  $\underline{Z}$ ,  $\text{Im}(\underline{Z})$  et donc  $\arg(\underline{Z})$  changent de signe en  $\omega_s$  et  $\omega_p$ .

On relève sur le graphe  $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 32,735$  kHz et  $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 32,768$  kHz, d'où  $\omega_s = 205680$  rad/s et  $\omega_p = 205887$  rad/s.

15.  $\frac{f_p}{f_s} = \frac{\omega_p}{\omega_s} = \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_0}}$  donc  $\boxed{C_1 = C_0 \left( \frac{f_p^2}{f_s^2} - 1 \right) = 3,0 \times 10^{-15} \text{ F}} = 3,0$  fF (femtoFarad)

$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$  donc  $\boxed{L = \frac{1}{C_1 \omega_s^2} = 7,9 \text{ kH}}$

16. On cherche les pulsations de coupure  $\omega_c$  telles que  $Z = \frac{Z_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_c}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega_c} \right)^2}} = \frac{Z_{\max}}{\sqrt{2}}$ ,

c'est-à-dire  $Q^2 \left( \frac{\omega_c}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega_c} \right)^2 = 1$ , d'où  $\frac{\omega_c}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega_c} = \pm \frac{1}{Q}$ , soit  $\omega_c^2 \pm \frac{\omega_p}{Q} \omega_c - \omega_p^2 = 0$

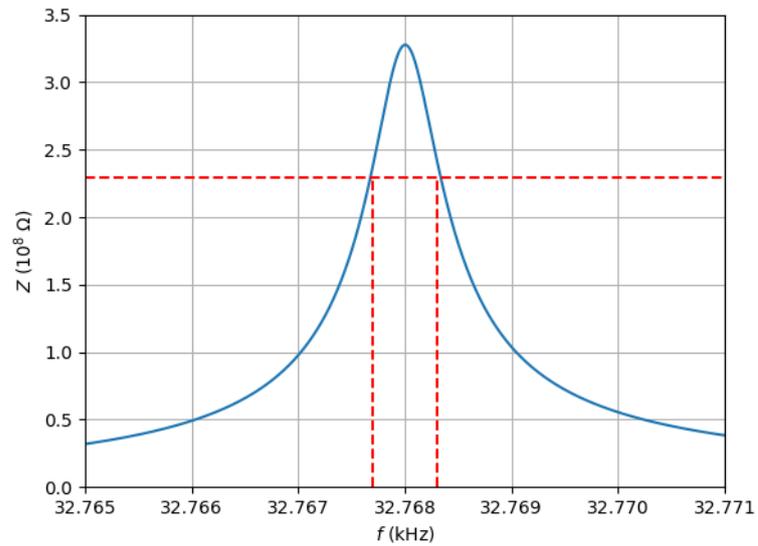
Le discriminant de ces 2 équations est :  $\Delta = \frac{\omega_p^2}{Q^2} + 4\omega_p^2 > 0$

Les 4 solutions de ces 2 équations sont donc :  $\omega_c = \pm \frac{\omega_p}{2Q} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{Q^2} + 4\omega_p^2} = \frac{\omega_p}{2Q} (\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2})$

$\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$  sont les 2 solutions positives :  $\omega_{c1}^2 = \frac{\omega_p}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} - 1)$

La largeur du pic à  $\frac{Z_{\max}}{\sqrt{2}}$  est donc  $\omega_{c2} - \omega_{c1} = \boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_p}{Q}}$ .

17. On relève  $Z_{\max} = 3,25 \times 10^8 \Omega$ , donc  $\frac{Z_{\max}}{\sqrt{2}} = 2,3 \times 10^8 \Omega$



On relève  $\Delta f = \frac{\Delta \omega}{2\pi} = 0,6$  Hz d'où  $Q = \frac{f_p}{\Delta f} = 5 \times 10^4$

Ainsi,  $R = \frac{L\omega_p}{Q} = 32$  k $\Omega$

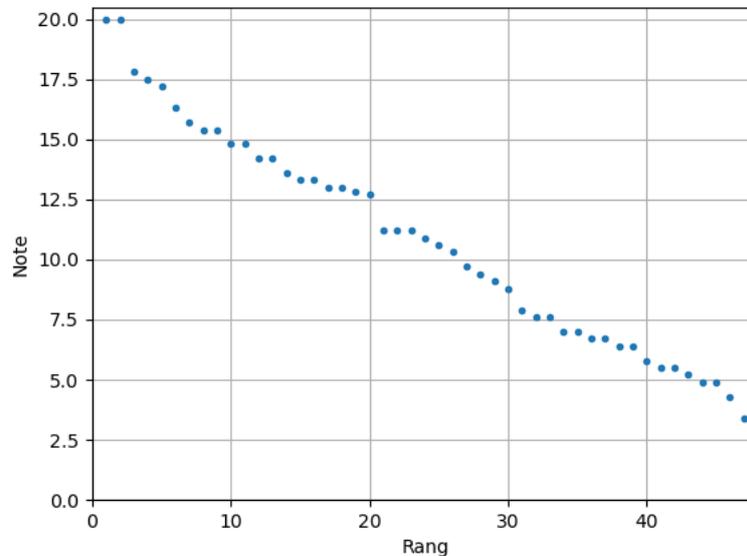
### 2.3 Principe d'une montre à quartz

18. Chaque compteur modulo 2 divise la fréquence par 2. Pour émettre des impulsions toutes les secondes, il faut une fréquence de 1 Hz. On cherche  $n$  tel que  $\frac{32768}{2^n} = 1$ , donc  $n = \frac{\ln(32768)}{\ln(2)} = 15$

# Commentaires du DS n° 4 de Physique-Chimie

Moyenne : 10,9/20

Max : 20/20



1. Le fait que la réaction conduise à un équilibre chimique n'est pas lié aux proportions stœchiométriques. Quelque soit le réactif limitant, sa pression partielle tend vers 0 si la réaction est totale et  $Q_r \rightarrow +\infty$ .
3.  $Q_r$  ne permet pas de savoir si l'état final est atteint plus ou moins rapidement. On ne discute ici que l'aspect thermodynamique de la réaction, pas l'aspect cinétique.
4. Il n'est pas nécessaire de faire une fonction `dicho` si on ne l'appelle qu'une seule fois. Si on choisit néanmoins d'écrire une fonction qui applique la dichotomie, il faut écrire une fonction générique qui ne s'applique pas au seul cas de l'énoncé. Cette fonction doit notamment prendre comme arguments la fonction dont on cherche le zéro, l'intervalle de départ et éventuellement la précision. Enfin il ne faut pas oublier d'appeler cette fonction avec les bons arguments !

```
def dicho(f,a,b,eps):
    while abs(b-a)>eps:
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<=0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m

def g(t):
    return t**2*(3-t)/2/(1-t)**3-10050

print(dicho(g,0,1,1e-15))
```

5. L'approximation  $\varepsilon \approx 0$  n'est pas satisfaisante, car dans ce cas  $Q_r \rightarrow +\infty$ . L'approximation est en fait  $\varepsilon \ll 1$  ou  $1 - \varepsilon \sim 1$  et non  $\varepsilon \sim \theta$ , qui n'a pas de sens mathématique. Mathématiquement, on cherche  $\varepsilon$  au premier ordre non-nul.
7. L'ajout de diazote n'augmente pas la pression qui est maintenue constante, mais la quantité totale de gaz  $n_{\text{tot}}$ .
8. La méthode des complexes ne fonctionne que pour un second membre de l'équation différentielle purement sinusoïdal : il ne peut pas y avoir de terme constant dans le second membre, en plus de l'excitation sinusoïdale. En particulier, on ne peut pas utiliser la représentation complexe, si on ne choisit pas l'origine à la position d'équilibre, puisque le second membre de l'équation différentielle contient alors un terme constant en  $\ell_0$ .
11. Si vous utilisez la notation  $\parallel$ , évitez de noter  $C_0 \parallel (R + L + C_1)$  : il faut garder des termes homogènes à des impédances, donc  $\frac{1}{jC_0\omega} \parallel (R + jL\omega + \frac{1}{jC_1\omega})$ . N'oubliez pas non plus les parenthèses, la priorité entre  $+$  et  $\parallel$  n'étant pas clairement définie.

21. Il faut bien préciser le système ici, à savoir boule  $\cup$  plateau. La boule seule n'est pas soumise à la force de rappel, mais à la réaction du plateau.

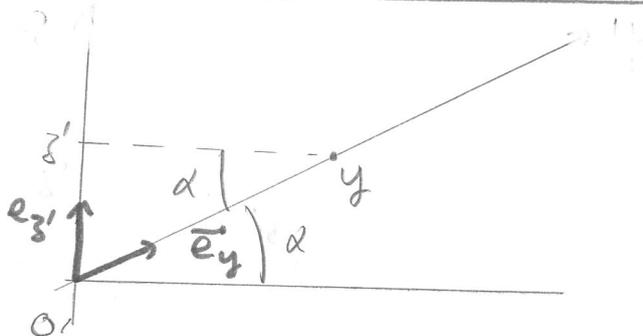
Ne pas écrire  $\vec{P} = -mg \sin(\alpha) \vec{e}_y$ , même si on n'a pas besoin de la coordonnée selon  $\vec{e}_z$ . On peut écrire  $P_y = -mg \sin(\alpha)$  ou encore  $\vec{P} = -mg \sin(\alpha) \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z$ , si on ne veut vraiment pas exprimer la coordonnée selon  $\vec{e}_z$ .

23. La boule est soumise à 2 réactions du support différentes, celle du flipper selon  $\vec{e}_z$  et celle du plateau selon  $\vec{e}_y$ .

La boule ne décolle pas lorsque la force de rappel du ressort s'annule, mais lorsque la réaction du plateau s'annule. La force de rappel n'est égale à la réaction du plateau, que si on néglige la masse du plateau.

### 3 Mouvements d'une boule de flipper

19.



$$\sin(\alpha) = \frac{z'}{y} \Rightarrow z' = y \sin(\alpha)$$

$$E_{pp} = mgz'$$

$$E_{pp} = mgy \sin(\alpha)$$

20. On cherche  $E_{pe}$  telle que :  $dE_{pe} = -\delta W(\vec{F}_n) = -\vec{F}_n \cdot d\vec{OM}$   
 $\vec{F}_n = -k(r-l_0)\vec{u}_n$  et  $d\vec{OM} = dr\vec{u}_n + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$

Donc  $dE_{pe} = -k(r-l_0)dr$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k(r-l_0)^2 + \text{cte}$$

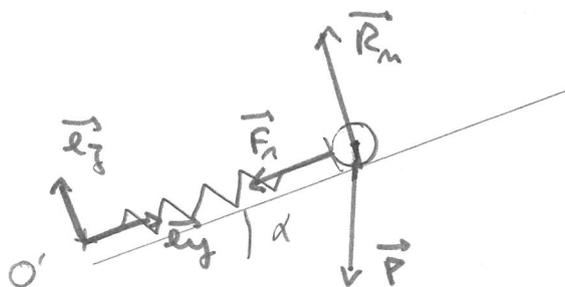


$E_{pe}$  existe, donc  $\vec{F}_n$  est conservative.

On choisit  $E_{pe}(l=l_0) = 0 = \text{cte}$

Ainsi,  $E_{pe} = \frac{1}{2} k(l-l_0)^2$

21.



Bilan des forces :

- poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\sin\alpha \vec{e}_y - \cos\alpha \vec{e}_z)$

- force de rappel :

$$\vec{F}_n = -k(y-l_0)\vec{e}_y$$

- réaction du support :  $\vec{R}_n = R_n \vec{e}_z$

A l'équilibre, les forces se compensent :

$$\vec{P} + \vec{F}_n + \vec{R}_n = \vec{0}$$

selon  $\vec{e}_y$  :  $-mg\sin(\alpha) - k(y_{eq} - l_0) = 0$

$$y_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k} \sin(\alpha) = 11,6 \text{ cm}$$

22. système : { boule + plateau }

Repérage :  $\vec{OM} = y \vec{e}_y$  ,  $\vec{v} = \dot{y} \vec{e}_y$  ,  $\vec{a} = \ddot{y} \vec{e}_y$

2ème loi de Newton :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{R}_m$

relan  $\vec{e}_y$  :  $m \ddot{y} = -mg \sin(\alpha) - k(y - l)$

soit,  $\ddot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{k}{m} y_{eq}$

On pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Une solution particulière est :  $y_p = y_{eq}$

Donc  $y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + y_{eq}$

Conditions initiales : 
$$\begin{cases} y(0) = y_i = A + y_{eq} \\ \dot{y}(0) = 0 = \omega_0 B \end{cases}$$

Ainsi 
$$y(t) = (y_i - y_{eq}) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + y_{eq}$$

23. système : { boule }

La boule est soumise à  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}_m$  et  $\vec{R}_p$  la réaction du plateau :  $\vec{R}_p = R_p \vec{e}_y$

2ème loi de Newton :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_m + \vec{R}_p$

$$m \ddot{y} = -mg \sin(\alpha) + R_p$$

Donc  $R_p = m \ddot{y} + mg \sin(\alpha)$

$$= -k(y - y_{eq}) + mg \sin(\alpha)$$

$$= -k y + k l_0$$

La boule décolle du plateau lorsque  $R_p = 0$ ,  
c'est-à-dire lorsque  $y = l_0$

On cherche l'instant  $t_0$  auquel la boule décolle

$$y(t_0) = l_0 \Leftrightarrow (y_i - y_{eq}) \cos(\omega_0 t_0) + y_{eq} = l_0$$

$$\Leftrightarrow \omega_0 t_0 = \arccos\left(\frac{l_0 - y_{eq}}{y_i - y_{eq}}\right)$$

$$v_0 = \dot{y}(t_0) = -(y_i - y_{eq}) \omega_0 \sin(\omega_0 t_0)$$

$$= -(y_i - y_{eq}) \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left[\arccos\left(\frac{l_0 - y_{eq}}{y_i - y_{eq}}\right)\right]$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{l_0 - y_{eq}}{y_i - y_{eq}}\right)^2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \left[ (y_{eq} - y_i)^2 - (l_0 - y_{eq})^2 \right]} = \sqrt{\frac{k}{m} (y_i^2 - l_0^2 - 2y_i y_{eq} + 2l_0 y_{eq})}$$

24. système : { boule + plateau }

$\vec{P}$  force conservative  $E_{pp} = m g y \sin(\alpha)$

$\vec{F}_1$  —————  $E_{pe} = \frac{1}{2} k (y - l_0)^2$

$\vec{R}_m \perp \vec{v}$  ne travaille pas.

Théorème de l'énergie mécanique entre  $M_i$  et  $M_0$  :

$$m g y_i \sin(\alpha) + \frac{1}{2} k (y_i - l_0)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g l_0 \sin(\alpha)$$

$$\text{D'où } v_0^2 = \frac{k}{m} (y_i - l_0)^2 + \underbrace{2 g \sin(\alpha) (y_i - l_0)}_{2 \frac{k}{m} (l_0 - y_{eq})}$$

$$\text{Ainsi, } v_0 = \sqrt{\frac{h}{m} (y_i^2 - l^2 - 2y_i y_{eq} + 2l y_{eq})}$$

$$\text{A.N. } \boxed{v_0 = 1,77 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

25. On cherche  $v_{\text{min}}$  telle que  $v_{c'} = 0$

On applique le théorème de l'énergie mécanique entre  $M_0$  et  $C'$  :

$$E_m(M_0) = E_m(C')$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{min}}^2 + m g l \sin(\alpha) = m g L \sin(\alpha)$$

$$v_{\text{min}}^2 = 2 g \sin(\alpha) (L - l)$$

$$\boxed{v_{\text{min}} = \sqrt{2 g \sin(\alpha) (L - l)}} = 1,52 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

26. 2ème loi de Newton :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{R}_t$

$$\text{selon } \vec{e}_z : 0 = -m g \cos(\alpha) + R_n$$

$$R_n = m g \cos(\alpha)$$

• Théorème de l'Énergie mécanique entre  $M_0$  et  $C_{\text{max}}$

$$E_m(C_{\text{max}}) - E_m(M_0) = W_{M_0 C_{\text{max}}}(\vec{R}_t) + \underbrace{W_{M_0 C_{\text{max}}}(\vec{R}_n)}_{=0}$$

$$\text{avec } W_{M_0 C_{\text{max}}}(\vec{R}_t) = \int_{M_0}^{C_{\text{max}}} \vec{R}_t \cdot d\vec{OM}$$

$$= - \int m g \cos(\alpha) (0,9L - l)$$

$$= - \int m g \cos(\alpha) (0,9L - l)$$

$$\text{D'où } m g (0,9L - l) \sin(\alpha) - \frac{1}{2} m v_{\text{min}}^2 = - \int m g \cos(\alpha) (0,9L - l)$$

$$f = -\tan(\alpha) + \frac{v_{\text{min}}^2}{2g \cos(\alpha)(0,9L - l)}$$

A.N.:  $f = 0,023$

27. Repérage :

$$\vec{OM} = R \vec{e}_n$$

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_n + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Forces :

$$\vec{R}_n = R_{n_n} \vec{e}_n + R_{n_z} \vec{e}_z$$

$$\vec{P} = mg (-\sin \alpha \vec{e}_y - \cos \alpha \vec{e}_z)$$

$$= mg [-\sin \alpha (\sin \theta \vec{e}_n + \cos \theta \vec{e}_\theta) - \cos \alpha \vec{e}_z]$$

2ème loi de Newton :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_n$

$$\begin{cases} -m R \dot{\theta}^2 = -mg \sin(\alpha) \sin(\theta) + R_{n_n} & (\vec{e}_n) \\ m R \ddot{\theta} = -mg \sin(\alpha) \cos(\theta) & (\vec{e}_\theta) \\ 0 = -mg \cos(\alpha) + R_{n_z} & (\vec{e}_z) \end{cases}$$

équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\alpha) \cos \theta = 0$$

$$\vec{R}_n = (mg \sin(\alpha) \sin(\theta) - m R \dot{\theta}^2) \vec{e}_n + mg \cos(\alpha) \vec{e}_z$$

28. Repérage :

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$$

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y$$

Forces :

$$\vec{R}_n = R_n \vec{e}_z$$

$$\vec{P} = -mg (\sin \alpha \vec{e}_y + \cos \alpha \vec{e}_z)$$

2ème loi de Newton :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_n$

$$\begin{cases} m \ddot{i} = 0 \\ m \ddot{j} = -mg \sin \alpha \end{cases}$$

Donc 
$$\begin{cases} \dot{i} = \dot{i}(0) = -v_D \\ \dot{j} = \dot{j}(0) - g \sin(\alpha) t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -v_D t + x(0) \\ y = -\frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2 + y(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -v_D t \\ y = -\frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2 + L + R \end{cases}$$

29. On cherche l'équation de la trajectoire

$$t = \frac{R}{v_D} \quad ; \quad y_{\text{fin}} = -\frac{g}{2v_D^2} \sin(\alpha) R^2 + L + R$$

$$y(-R) = R \Leftrightarrow -\frac{g}{2v_D^2} \sin(\alpha) R^2 + L = 0$$

$$\Leftrightarrow v_D^2 = \frac{gR^2}{2L} \sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_D = R \sqrt{\frac{g}{2L} \sin(\alpha)}} \quad (v_D > 0)$$

A.N.  $v_D = 0,21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$