Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Exercice 1. ($\heartsuit$) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$.

Exercice 2. ($\heartsuit$) Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction $h: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\sqrt{x}) \end{array}$

1) en revenant à la définition
2) en utilisant le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 3. ($\heartsuit$) Soient f, g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par: $f(x) = x\ln x$ $\qquad g(x) = x^2 \ln x$.

1) Étudier la continuité, la dérivabilité, la classe de f et g.
2) Montrer que ces deux fonctions admettent un prolongement par continuité en 0. On notera encore f, g ces prolongements.
3) Ces prolongements sont-ils dérivables en 0? Ces prolongements sont-ils de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4. ($*$) Soient $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$.

Dérivées successives

Exercice 5. ($\heartsuit$) A près avoir justifié leur existence, calculer les dérivées successives des fonctions définies par

1) $f(x) = (2x^2 + 4x - 5)\,\mathrm{e}^{3x}$
2) $f(x) = \ln(1 - x^2)$
3) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos x$ $\quad$ [$\cos x = \mathrm{Re}(\ldots)$]

Exercice 6. ($*$) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{2n}$ et $g_n = f_n^{(n)}$.

1) Calculer $g_n(x)$ de deux manières:
   -a- en dérivant n fois x^{2n}
   -b- en appliquant la formule de Leibniz à $x^n \times x^n$.
2) En comparant les deux résultats, obtenir une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 7. ($**$) On pose $f(x) = \begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer qu'il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème de Rolle, accroissements finis

Exercice 8. ($\heartsuit$) Soit$f$ une fonction réelle dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9. ($*$) Soit$f$ une fonction réelle dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f'(0) < 0$ et $f'(1) > 0$.
Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

1) Comment prouver rapidement le résultat lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$?

2) Montrer le résultat lorsque f est seulement dérivable sur $[0, 1]$.

Exercice 10. ($*$) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$. Montrer que $P_n^{(n)}$ s'annule exactement n fois sur $[-1, 1]$.

Exercice 11. ($\heartsuit$) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, b]$ telles que:

$$f(a) = g(a) \qquad f(b) = g(b) \qquad \forall x \in [a, b], \quad f''(x) \leqslant g''(x).$$

Montrer que: $\forall x \in [a, b]$, $g(x) \leqslant f(x)$. *[On pourra introduire la fonction $h = f - g$]*

Exercice 12. ($*$) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que $f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Exercice 13. ($**$) Soient $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a + 2h]$.
Montrer que : $\exists c \in]a, a+2h[/ f(a+2h)-2f(a+h)+f(a) = h^2 f''(c)$. *[On pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x+h)-f(x)$].*

Exercice 14. ($*$)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f, g deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Exercice 15. ($**$) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f' > 0$ sur $[0, 1]$.
Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant mx$.

Exercice 16. ($\heartsuit$) Montrer que: $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{x}{1 + x^2} < \operatorname{Arctan} x < x$.

Exercice 17. ($\heartsuit$) Montrer que: $\quad \forall (x, y) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]^2, \quad |\tan x - \tan y| \leqslant 2|x - y|$.

Exercice 18. ($\heartsuit$) Montrer que: $\quad \forall x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{sh}(x)| \geqslant |x|$.

Exercice 19. ($\heartsuit$) Estimer l'erreur commise dans l' approximation suivante $\sqrt{10001} \approx 100$.

Exercice 20. ($\heartsuit$)
On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $f(x) = \dfrac{3}{4} \cos x$.

1) Montrer que f admet un unique point fixe α. Vérifier que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2) -a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$.
   -b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$.
   -c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ puis que la suite $(u_n)_n$ converge vers α.

3) Pour quelle valeur de n peut-on affirmer que le terme u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Parce qu'il reste de la place...

Exercice 21. ($*$) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(2x) = 2f(x). \qquad \textit{[Poser } g(x) = \tfrac{f(x)}{x},\ g(0) = ??\textit{]}$$