Calculs sur les polynômes

Exercice 1. (♡) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants

1) $P = (X+2)^n - (X-2)^n$
2) $Q = (X^2+1)^n - (X+3)^{2n}$

Exercice 2. (♡) Calculer le produit des racines des polynômes:

1) $P = X^4 - 3X^3 + 3X + 5$
2) $P = 2X^5 + 4X^4 + 5X^2 - 3X + 7$
3) $P = (X-1)^n + (X+1)^n$ où $n \in \mathbb{N}$
4) $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(X + \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. (♡) Calculer la somme des racines des polynômes:

1) $P = 2X^5 + 4X^4 + 5X^2 - 3X + 7$
2) $P = (X-\mathrm{i})^n - (X+\mathrm{i})^n$ où $n \in \mathbb{N}$
3) $P = X^n - 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$
4) $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X+k)^n$

Equation

Exercice 4. $(*)$ Trouver les polynômes P dans $\mathbb{R}[X]$ vérifiant l'égalité: $P'^2 = 4P$.

Exercice 5. $(*)$ Trouver les polynômes P dans $\mathbb{R}[X]$ vérifiant l'égalité: $(X^2+1)P'' + P' + XP = X^3$.

Arithmétique

Exercice 6. (♡) Déterminer, rapidement, si le polynôme A est divisible par B pour:

1) $A = X^4 + 4X^2 - 2X - 3$ et $B = -X + 1$
2) $A = 17X^5 - 5X^4 + 12X^2 - 123X + 42$ et $B = 7X^8 + 5X^4 - 3X^2 + 5$
3) $A = X^5 - 2X^4 - X + 2$ et $B = X^2 - 3X + 2$

Exercice 7. (♡) Effectuer les divisions euclidiennes de

1) $X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 9$ par $X + 3$
2) $2X^6 + 4X^3 + 3X^2 - 2X + 5$ par $2X^3 - 2X + 2$
3) $3X^2 - 2X + 7$ par $7X^4 + 2X^2 - X + 3$
4) $X^7 - 3X^6 + X^5 - X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par X^3

Exercice 8. (♡) À quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, le polynôme $P = X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $B = X^2 + X + 1$.

Exercice 9. (♡) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ (pas le quotient...)

Exercice 10. $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X + 4$ (pas le quotient...).

Exercice 11. $(**)$ Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1) Montrer que si m divise n alors $X^m - 1$ divise $X^n - 1$.
2) -a- Notons(q,r) le quotient et le reste dans la division euclidienne de n par m. Montrer que le reste dans la

division euclienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est $X^r - 1$.

-b- En déduire que : $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1$.

Exercice 12. $(**)$ Soient p et q deux entiers supérieurs à 2, premiers entre eux. Montrer que $(X^p - 1)(X^q - 1) | (X - 1)(X^{pq} - 1)$.

Racines

Exercice 13. $(\heartsuit)$

1) Montrer que -1 est racine du polynôme $P = 2X^4 - X^3 - 6X^2 - X + 2$.

2) Quel est son ordre de multiplicité.

3) Déterminer les autres racines de P.

Exercice 14. $(\heartsuit)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Montrer que P est divisible par $(X-1)^3$. Est-il divisible par $(X-1)^4$?

Exercice 15. $(*)$ Soit $P = X^{2n} + X^n + 1$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme P soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 16. $(\heartsuit)$ Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P = X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 14X + 10$.

1) Vérifier que $1 + \mathrm{i}$ est racine de P.

2) En déduire un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 divisant P.

3) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 17. $(*)$ Factoriser le polynôme $4X^3 + 4X^2 - 7X + 2$ sachant qu'il admet une racine double.

Exercice 18. $(**)$ Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X+1)^n - \mathrm{e}^{2n\,\mathrm{i}\,a}$.

1) Trouver les racines de P.

2) En calculant le produit de ces racines, déterminer une expression simple de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 19. $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $P_n = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 20. $(*)$ Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7 tels que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1]^4$ divise $P-1$.

Suite de polynômes

Exercice 21. $(\heartsuit)$ On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par:

$$H_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = H_n' - 2XH_n.$$

1) Déterminer H_1, H_2, H_3.
Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n \in \mathbb{R}[X]$.

2) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$ le degré de H_n et son coefficient dominant et le démontrer.

Factorisation

Exercice 22. ($\heartsuit$) Décomposer en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

1) $P_1 = 2X^3 - 4X^2 - 10X + 12$
2) $P_2 = (X^2+1)^2 - 4X^4$
3) $P_3 = (X^2 - 3X + 2)^2 + X^2$
4) $P_4 = X^4 + X^2 + 1$
5) $P_5 = X^6 - 3X^3 + 2$
6) $P_6 = X^6 + 1$
7) $P_7 = X^8 - 1$

Exercice 23. ($*$) Factoriser $P = (X-1)^n - (X+1)^n$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 24. ($*$) Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé avec n racines distinctes alors P' est également scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 25. ($***$) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P}(x) \geqslant 0$.
Montrer qu'il existe A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.
On peut décomposer P dans $\mathbb{C}[X]$ et s'intéresser à l'ordre de multiplicité des racines réelles.

Racines et coefficients

Exercice 26. ($*$) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que le polynôme $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre. Déterminer alors toutes les racines.

Exercice 27. ($*$) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que deux des racines du polynôme $X^3 - 5X^2 - 8X + \lambda$ aient une somme égale à -1. Déterminer alors les trois racines.

Exercice 28. ($**$) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par $P = X^3 - 3X^2 - 10X + 24$ et α_1, α_2 et α_3 ses racines. Déterminer pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$, $S_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k$.
Pour $k \in\geqslant 3$, on pourra effectuer la DE de X^k par P.

Exercice 29. ($*$) Résoudre les systèmes

1) Résoudre le système $\begin{cases} a+b+c = 2 \\ ab+bc+ac = -5 \\ abc = -6 \end{cases}$.

2) Résoudre le système $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1 \\ abc = -4 \end{cases}$.