Exercice 1. "Théorème de Rolle à l'infini" Ne sera pas corrigé, une correction sera donnée vendredi 26 Janvier
Soit $f : [a, +\infty[\to +\infty$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $f(a) = \lim\limits_{+\infty} f$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Indication : vous utiliserez une des deux méthodes.
Méthode 1 : appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire bien choisie.
Méthode 2 : adapter la démonstration du théorème de Rolle.

Problème. Méthode de Newton

On se donne deux réels $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose que $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ et : $\forall x \in [a, b],\ f'(x) < 0$.
On s'intéresse à la résolution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]a, b[$.

Partie I - Méthode de Newton

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $]a, b[$. On note α cette solution.

   Le but de ce problème est de présenter une méthode de résoluton approchée de α.

2) Soit $x_0 \in [a, b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0.

   On introduit alors la fonction g définie par : $\forall x\ [a, b],\ \ g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
   On obtient donc une nouvelle approximation de α en prenant $x_1 = g(x_0)$. On recommence le même procédé. On est donc amené à étudier l'existence, puis la convergence vers α de la suite (x_n) définie par :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n)$.

3) Dans cette question on cherche à approcher $\sqrt{3}$ grâce à cette méthode. On pose la fonction f définie par : $\forall x \in [1, 3],\ f(x) = 3 - x^2$.

   -a- Tracer la courbe représentative de f.

   -b- Prenez $x_0 = 2$ et construire graphiquement les trois premiers termes de la suite (x_n).

Partie II - Étude de g

1) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et calculer sa dérivée. Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.

2) On souhaite prouver qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |g(x) - \alpha| \leqslant K|x - \alpha|^2.$$

   -a- Justifier l'existence de deux réels m, M strictement positifs tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \geqslant m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leqslant M.$$

   -b- Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que : $\forall t \in [a, b],\ |f(t)| \leqslant L|t - \alpha|$.

   -c- Soit $x \in [a, b]$, en utilisant les accroissements finis montrer que

$$|g(x) - \alpha| \leqslant \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|^2.$$

   -d- Conclure.

Partie III - Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_0 \in [a,b] \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = g(x_n).$$

1) Dans cette question uniquement, on suppose de plus $f'' > 0$ sur $[a,b]$ et $x_0 = a$.

   -a- Etudier les variations de g.

   -b- Justifier que (x_n) est bien définie, croissante et majorée par α.

   -c- En déduire que la suite (x_n) converge vers α.

2) On revient au cas général.

   -a- Justifier qu'il existe $h > 0$ tel que en notant $I = [\alpha - h, \alpha + h]$ on ait $Kh < 1$ et $I \subset [a,b]$.

   -b- Montrer que I est stable par g.
   Dans toute la suite $x_0 \in I$, ce qui avec la stabilité de I garantit que la suite (x_n) est à valeurs dans I.

   -c- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{K}\left(K|x_0 - \alpha|\right)^{2^n}.$$

   -d- En déduire que (x_n) converge vers α.

3) Retour sur l'exemple d'approximation de $\sqrt{3}$, on reprend f définie par $f(x) = 3 - x^2$ pour $x \in [1,3]$.

   -a- Montrer que l'on peur prendre $K = 3$ et $h = 0.3$ (on pourra utiliser que $1,7 < \sqrt{3} < 2$.

   -b- En déduire que la suite (x_n) définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ est bien définie.

   -c- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \sqrt{3}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0.9)^{2^n}$.

   -d- Combien d'itérations doit-on effectuer pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ avec cette méthode?