Chapitre
Matrices

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n, p, q \in \mathbb{N}^*$.

I Matrices

I.1 Définitions et premières propriétés

Définition (Matrices)

- Une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ou matrice de **format** (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille de np éléments de $\mathbb{K}$ présentée sous la forme d'un tableau

$$A = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}}\right\} n \text{ lignes}, \qquad \text{noté aussi } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \qquad \text{ou } A = (a_{ij})$$

  où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ leur ensemble. Si $n = p$, la matrice A est dite carrée, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ leur ensemble.

- i est l'indice de ligne, j l'indice de colonne, a_{ij} est le coefficient en position (i,j).

  La **matrice-colonne** $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est la j-ième colonne de A et la **matrice-ligne** $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix}$ est la i-ème ligne de A.

- Si $L_1, \dots, L_n$ désignent les n lignes de A et $C_1, \dots, C_p$ désignent les p colonnes de A, on utilise l'**écriture par blocs**

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{pmatrix}.$$

- La matrice de format (n,p) qui ne contient que des 0 est appelée la matrice nulle et est notée $0_{n,p}$. Si $n = p$, on note 0_n la matrice $0_{n,n}$.

Remarques

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ sont des exemples de matrices, dont la première est carrée.

2) En pratique, i et j désignent toujours respectivement les indices de ligne et colonne.

3) Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles ont même format (n, p) et si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

4) Si une matrice est notée avec des grandes lettres A, B, M on notera généralement ses coefficients avec des petites lettres a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}.

I.2 Combinaison linéaire

Définition (Somme, multiplication par un scalaire)

Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On définit:

- **somme** : $A + B$ la matrice $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- **multiplication par un scalaire** : λA la matrice $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- $\lambda A + \mu B$ est appelée **combinaison linéaire** de A et B.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Théorème (Propriétés de la somme et de la multiplication par un scalaire)

- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif de neutre 0_{np} et l'opposé de A est $-A = (-1)A$.
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

⚠ **Attention** ⚠ On ne peut pas additionner les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ car elles n'ont pas même format.

Définition (Matrices élémentaires)

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient en position (i, j) qui vaut 1. Ces matrices sont appelées **matrices élémentaires** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarques (Ecriture d'une matrice à l'aide des matrices élémentaires)

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme combinaison linéaire de matrices élémentaires :

I.3 Produit matriciel

Définition (Produit matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Le **produit** de A par B noté AB est la matrice de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont
$$\left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant r\\ 1\leqslant i\leqslant p}}.$$

Remarques

- **Compatibilité des formats.** Le produit n'est pas défini en général. Pour définir le produit AB il faut que $\boxed{\text{nombre de colonnes de } A = \text{nombres de lignes de } B}$, dans ce cas :
$$\text{format } (p, \boxed{q}) \times \text{ format } (\boxed{q}, r) = \text{ format } (p, r).$$

- **Le produit n'est pas commutatif.** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc } AB \neq BA.$$

- **Un produit peut être nul sans qu'une des matrices ne le soit.**
Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice.

1) A quelle condition sur les formats les deux produits AB et BA sont-ils possibles?

2) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble, noté $C(A)$, des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

3) **A connaître**. Soient i, j, k, l quatre entiers. E_{ij} et E_{kl} matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ respectivement. Calculer $E_{ij}E_{kl}$.

Remarques (Produit matriciel, lignes et colonnes)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$.

- $A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est la j-ème colonne de de A (le 1 est en j-ème position).

- $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \times A$ est la i-ème ligne de A (le 1 est en i-ème position)

- Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$, en notant $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A : $AX = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k$.

Proposition (Produit de matrices par blocs)

Soit $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

(sous réserve que les formats soient compatibles)

Définition (Matrice identité)

On appelle **matrice identité** de taille $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}, \quad \text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} : \text{symbole de Kronecker.}$$

Théorème (Propriétés du produit matriciel)

Soient A, B, C des matrices. Sous réserve de compatibilité des formats, la multiplication vérifie:

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_p = A$.

NB : pour les matrices carrées, il n'y a pas de problème de compatibilité de format.

I.4 Trace

Définition (Trace)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de la matrice A, notée $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Théorème (Propriétés de la trace)

1) **Linéarité** Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\quad \mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B)$.
2) **Trace d'un produit** Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice. Montrer que l'équation $AB - BA = I_n$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

II Matrices carrées

II.1 Anneau des matrices

Théorème (L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

$$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times) \text{ est un anneau (non commutatif et non intègre).}$$

Le neutre de $\times$ est I_n.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note $A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$ et $A^0 = I_n$.

Théorème (Trois formules)

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $m \in \mathbb{N}$.

1) **Formule du binôme de Newton.** On suppose que $\boxed{A \text{ et } B \text{ commutent}}$ i.e. $AB = BA$.

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} \qquad \text{(on peut échanger les exposants)}$$

2) **Formule de factorisation de $A^m - B^m$.** Si $m \geqslant 1$, on suppose que $\boxed{A \text{ et } B \text{ commutent}}$ i.e. $AB = BA$.

$$\begin{aligned} A^m - B^m &= (A-B).\sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k}B^k \qquad \text{(on peut échanger les exposants)} \\ &= (A-B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1}) \end{aligned}$$

3) **Formule de factorisation $I_n - A^m$** Si $m \geqslant 1$,

$$I_n - A^m = (I_n - A).\sum_{k=0}^{m-1} A^k = (I_n - A).(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}).$$

⚠ **Attention** ⚠ L'hypothèse $AB = BA$ est essentielle, en effet dans le cas $m = 2$, $(A+B)(A+B) =$

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Calcul de A^n)**

- **Méthode 1** : on calcule A^2, A^3, A^4 puis on conjecture une formule pour A^n que l'on prouve par récurrence.
- **Méthode 2** : on écrit $A = M + N$ où M et N sont deux **matrices qui commutent** et on utilise la formule du binôme de Newton.
  Il faut dans ce cas savoir calculer les puissances successives, M^k et N^k.
  Souvent utilisé avec $M = \lambda I_n$.
- **Méthode 3** : on pose des coefficients pour A^n qui dépendent de n (des suites donc). On calcule $A^{n+1} = A \times A^n$ puis on montre que les coefficients vérifient une relation de récurrence remarquable (géométrique, arithmético-géométrique...).
- **Méthode 4** : avec un polynôme annulateur. S'il existe un polynôme P tel que $P(A) = O_n$ on détermine le reste R de de la division euclidienne de X^n par P : $X^n = QP + R$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$; alors $A^n = R(A)$.

Exercice.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3 en déduire l'existence d'un polynôme P tel que $P(A) = 0_3$. Déterminer alors A^n.

II.2 Matrices triangulaires

Définition (Matrices triangulaires)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure** (resp. **triangulaire inférieure**)) si pour tout $i > j$, $a_{ij} = 0$ (resp. pour tout $i < j$, $a_{ij} = 0$) i.e.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(resp.} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{)}$$

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure stricte** (resp. **triangulaire inférieure stricte**) si de plus les coefficients diagonaux sont nuls.

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonale** si pour tout $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ i.e.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

-

Théorème (Opérations sur les matrices triangulaires)

- La somme, le produit, la multiplication par un scalaire de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

- De plus, si $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ sont triangulaires supérieures (resp. inférieures) alors les coefficients diagonaux de AB sont les produits 2 à 2 des coefficients diagonaux de A et B i.e.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

- En particulier si A, B sont diagonales:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } m \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \alpha_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^m \end{pmatrix}.$$

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

III Systèmes linéaires et opérations élémentaires

III.1 Ecriture matricielle des systèmes linéaires

Tout système linéaire peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{Écriture matricielle d'un système.}$$

Plus généralement, le système

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

s'écrit matriciellement : $AX = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}).$$

Le système est homogène si $b_1 = \ldots = b_n = 0$ c'est-à-dire $B = 0_{n1}$.

Théorème (Structure de l'ensemble des solutions de (S))

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et on pose le système linéaire : $(S)\ AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$. Alors

- **ou bien** ce système est incompatible
- **ou bien** ce système est compatible et dans ce cas : la solution générale du système est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène.

III.2 Opérations élémentaires sur les matrices

Définition (Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes)

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'une matrice les opérations suivantes.

- **Échange** : $L_i \leftrightarrow L_j$
- **Dilatation** Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- **Transvection** Si $\lambda \in \mathbb{K}$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

On définit des opérations analogues sur les colonnes: $C_i \leftrightarrow C_j \qquad C_i \leftarrow \alpha C_i \qquad C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.

☞ **Explication** ☜ Ces opérations élémentaires sur les lignes sont exactement les opérations élémentaires effectuées sur les lignes d'un système linéaire lorsqu'on applique le pivot de Gauss.

Théorème (Lien entre opérations et multiplication matricielle)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. L'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ sur A équivaut à la multiplication de A $\boxed{\text{à gauche}}$ par

$$P_{ij} = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Matrice de transposition.
Les coefficients non écrits sont nuls.
Matrice obtenue en faisant $L_i \leftrightarrow L_j$ sur I_n qui appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. L'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$ sur A équivaut à la multiplication de A $\boxed{\text{à gauche}}$ par

$$D_i(\lambda) = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \alpha & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Matrice de dilatation.
Les coefficients non écrits sont nuls.
Matrice obtenue en faisant $L_i \leftarrow \alpha L_i$ sur I_n qui appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sur A équivaut à la multiplication de A $\boxed{\text{à gauche}}$ par

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{ccccccc} & & j & & i & & \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & \lambda & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Matrice de transvection.
Les coefficients non écrits sont nuls.
Matrice obtenue en faisant $L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_j$ sur I_n qui appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4) Pour les opérations sur les colonnes, il faut remplacer produit à gauche par produit à droite et remplacer les matrices d'ordre n par matrice d'ordre p

5) Les matrices P_{ij}, $D_i(\lambda)$, $T_{ij}(\lambda)$ sont appelées matrices élémetaires.

Remarques

Soit $\alpha \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on remarque que:

$$P_{ij}^2 = I_n \qquad D_i(\alpha)D_i(\frac{1}{\alpha}) = D_i(\frac{1}{\alpha})D_i(\alpha) = I_n \qquad T_{ij}(\lambda)T_{ij}(-\lambda) = T_{ij}(-\lambda)T_{ij}(\lambda) = I_n.$$

IV Inversibilité des matrices carrées

IV.1 Définition et premières propriétés

Définition (Matrice inversible)

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. La matrice B est notée A^{-1} et est appelée l'inverse de A.
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et appelé le **groupe linéaire d'ordre** n.

Remarques (Unicité de l'inverse)

L'inverse d'une matrice si elle existe est unique.

Exemple

1) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2) Les matrices élémentaires P_{ij}, $D_i(\lambda)$ et $T_{ij}(\mu)$ sont inversibles avec

$$(P_{ij})^{-1} = \qquad (D_i(\lambda))^{-1} = \qquad (T_{ij}(\mu))^{-1} = \qquad .$$

Exercice. Soient deux matrices non nulles A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = 0_n$. Montrer qu'aucune des deux matrices n'est inversible.

Théorème (Propriétés de l'inverse)

Soient $(A, B) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))^2$. Alors:

1) Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe, en particulier, pour tout $(A, B) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))^2$,

$$A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad (A^{-1})^{-1} = A, \qquad AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3) Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

⚠ **Attention** ⚠

1) On ne considère que l'inverse de $\boxed{\text{matrices carrées}}$.
2) On n'écrira JAMAIS, $\dfrac{1}{A}$ pour A^{-1} ou même $\dfrac{B}{A}$. Car que signifierait $\dfrac{B}{A}$: BA^{-1} ou $A^{-1}B$, le produit n'étant pas commutatif cela n'aurait pas de sens.

IV.2 Inversibilité et système linéaire

Théorème-Définition (Système de Cramer)

- Un système linéaire est dit de Cramer si sa matrice est inversible. En particulier le système admet autant d'équations que d'inconnues, la matrice est carrée.
- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Le système de Cramer $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution $A^{-1}B$.

Théorème (Conditions suffisantes de non inversibilité)

Sot $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'une des colonnes (resp. lignes) de A est combinaison linéaire de ses autres colonnes (resp. lignes) alors A n'est pas inversible.
En particulier, si l'une des colonnes ou lignes est nulle alors la matrice A n'est pas inversible.

Remarques (Et la réciproque...)

On verra plus tard que la réciproque du premier résultat est vraie. Pour le moment on ne l'utilise pas.

Exercice.

1) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur une matrice diagonale pour qu'elle soit inversible. Dans le cas d'inversibilité, donner l'inverse.

Théorème (Caractérisation de l'inversibilité à l'aide des systèmes linéaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si pour tout second membre $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ admet une une unique solution.

Méthode pratique (Calcul de l'inverse par résolution de système)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$, où l'on pose

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On résout alors le système $AX = Y$.

- Si A est inversible on termine la résolution du système qui admet une unique solution

$$AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$$

ce qui s'écrit:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x1 = \alpha_{11}y_1 + \cdots + \alpha_{1n}y_n \\ \qquad\vdots \\ x_n = \alpha_{n1}y_1 + \cdots + \alpha_{nn}y_n \end{cases}.$$

La matrice inverse de A se lit en fin de résolution est alors: $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

- Si A n'est pas inversible on aboutit à un système qui n'admet pas toujours une unique solution.

Exercice.

1) Calculer l'inverse, sous réserve d'existence, de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Calculer l'inverse, sous réserve d'existence, de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3) Pour quelle valeur de m la matrice suivante $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

IV.3 Matrices particulières

Théorème (Inverse d'une matrice $(2, 2)$)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

On appelle déterminant de A le réel $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

A est inversible si et seulement si $\det(A) = ad - bc \neq 0$, dans ce cas $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

Exercice.

1) Calculer l'inverse, sous réserve d'existence, de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

2) Calculer l'inverse, sous réserve d'existence, de la matrice $B = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème (Inverse d'une matrice triangulaire)

Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
Dans ce cas, A^{-1} est aussi triangulaire supérieure (resp. inférieure) et ses coefficients diagonaux sont exactement les inverses des coefficients diagonaux de A.

IV.4 Calcul de l'inverse : pivot de Gauss

Principe de la méthode Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on cherche à prouver qu'elle est inversible et à en calculer l'inverse. La méthode consiste à utiliser des opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes de la matrice A.

- Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes/colonnes de A revient à multiplier A par des matrices élémentaires qui sont des matrices inversibles (vu plus haut). Si A est inversible le résultat des multiplications successives est inversible et donc si à un moment on tombe sur matrice non inversible c'est que A n'est pas inversible.
- Si l'on parvient à transformer A en I_n par des opérations élémentaires **sur les lignes**. Notons alors $E_1, \dots, E_k$ les matrices élémentaires correspondant à ces opérations, on a donc : $E_k \times \cdots \times E_2 E_1 A = I_n$ donc $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ et donc
$$A^{-1} = (E_1^{-1} \cdots E_k^{-1})^{-1} = E_k \times \cdots E_2 E_1 = E_k \times \cdots E_2 E_1 I_n.$$
La matrice A^{-1} s'obtient donc en appliquant à I_n dans le même ordre, les mêmes opérations élémentaires que sur A.
- On peut travailler aussi **uniquement sur les colonnes** de A.

⚠ **Attention** ⚠ Si on choisit de manipuler sur les lignes (ou bien les colonnes), il faut s'y tenir!

Exercice.

1) Calculer l'inverse, sous réserve d'existence, de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Calculer l'inverse, sous réserve d'existence, de la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

✎ Méthode pratique ✎ (Toutes les méthodes de calcul d'inverse)

On cherche à calculer si elle existe la matrice inverse de A

- Si A a une forme particulière : de format $(2,2)$, diagonale, triangulaire, on utilise le résultat du cours.
- Si une colonne ou une ligne est combinaison linéaires des autres colonnes (ou lignes); si une colonne ou une ligne est nulle la matrice n'est pas inversible.
- On utilise la méthode de résolution de système.
- On utilise la méthode du pivot de Gauss.
- Si la matrice A vérifie une relation polynomiale nulle (on parle de polynôme annulateur) on factorise par A puis on isole la matrice identité pour faire apparaître $AB = BA = I_n$.

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3. En déduire que A est inversible et déterminer l'inverse de A.

V Transposition

Définition (Transposition)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **transposée** de A est la matrice de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ notée $A^\top$ telle que:

$$A^\top = \left(a'_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \quad \text{où} \quad a'_{ij} = a_{ji}.$$

L'ancienne notation : ${}^tA$ (qui risque d'être parfois utilisée).

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☞ **Explication** ☜ La transposition échange les lignes et les colonnes d'une matrice, elle échange donc le nombre de lignes et le nombre de colonnes. Donc la transposée d'une matrice carrée est une matrice carrée de même taille.

Théorème (Propriétés de la transposition)

1) **Involutivité** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.
2) **Linéarité**. Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\quad (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$.
3) **Transposée d'un produit**. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\quad (AB)^\top = B^\top A^\top$.
4) **Transposée de l'inverse**. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

Définition (Matrice symétrique et antisymétrique)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) A est **symétrique** si $A^\top = A$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ leur ensemble.
2) A est **antisymétrique** si $A^\top = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ leur ensemble.

Exemples $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarques

Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. En effet