I Signaux périodiques

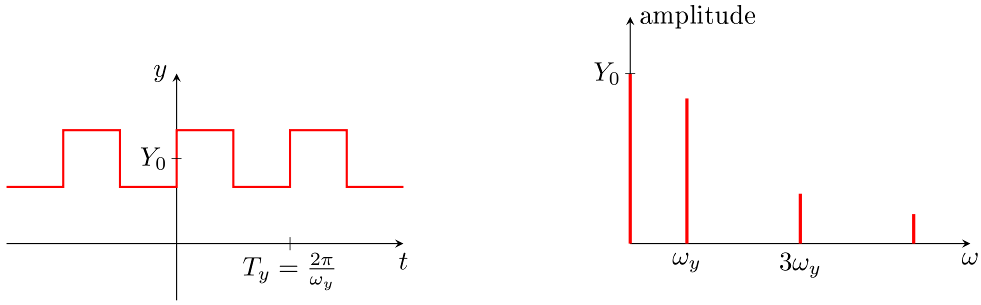
1 Décomposition en série de Fourier

Toute fonction périodique $y(t)$ de pulsation ω_y peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations multiples de ω_y (c'est-à-dire de la forme $n\omega_y$ où $n \in \mathbb{N}$). Autrement dit, toute fonction périodique peut s'écrire :

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \cos(n\omega_y t + \varphi_n)$$

La pulsation ω_y du signal est appelée pulsation **fondamentale**.
Les termes de la décomposition en série de Fourier sont appelés **harmoniques**. Y_n et φ_n sont l'amplitude et la phase à l'origine de l'harmonique de rang n.
Le terme Y_0 de pulsation nulle ($n = 0$) est appelé **composante continue**.
Le **spectre** (d'amplitude) du signal est la représentation des amplitudes Y_n des différents termes en fonction de ω (ou f).

Exemple : la série de Fourier d'un signal carré est $y(t) = Y_0 + \dfrac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2p+1} \sin[\underbrace{(2p+1)}_{n \text{ impairs}}\omega_y t]$

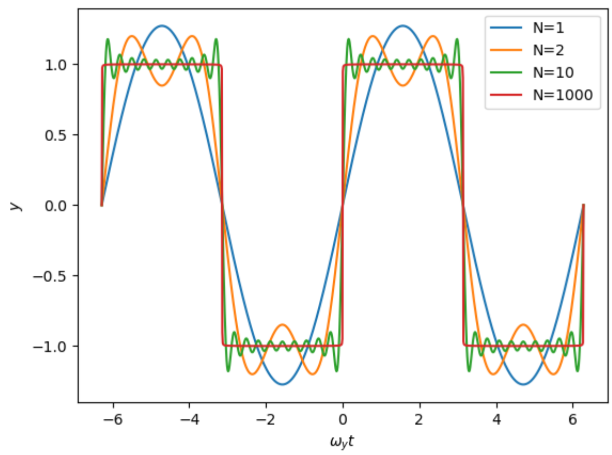


Signal *Spectre*

Synthèse d'un signal carré à partie de sa série de Fourier

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N=1000 # nombre d'harmoniques
wt=np.linspace(-2*np.pi,2*np.pi,N)
y=np.zeros(len(wt)) # Y0=0
for p in range(N):
        y=y+4/pi/(2*p+1)*np.sin((2*p+1)*wt)
plt.plot(wt,y)
```



2 Valeur moyenne

La valeur moyenne d'un signal périodique $y(t)$ de période T est : $\boxed{\langle y \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} y(\tau)\mathrm{d}\tau}$

La valeur moyenne ne dépend pas de l'instant t de départ.

a Cas d'un signal sinusoïdal

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal $y(t) = Y\cos(\omega t + \varphi)$ est nulle.

Démonstration : $\langle y \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T Y\cos(\omega t+\varphi)dt = \dfrac{1}{T}\left[\dfrac{Y}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)\right]_0^T$
Or $\omega T = 2\pi$, *donc* $\sin(\omega T + \varphi) = \sin(\varphi)$

b Cas d'un signal périodique quelconque

La valeur moyenne d'un signal périodique est égale à sa composante continue.

Démonstration : Un signal périodique quelconque $y(t)$ de pulsation ω_y se décompose en série de Fourier :

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \cos(n\omega_y t + \varphi_n)$$

La valeur moyenne $\langle y \rangle$ est la somme des valeurs moyennes des différents termes. Les termes de rang $n \geq 1$ sont des signaux sinusoïdaux de période $\frac{2\pi}{n\omega_y} = \frac{T_y}{n}$. On calcule leur valeur moyenne sur une période T_y :

$$\langle Y_n \cos(n\omega_y t + \varphi_n) \rangle = \frac{1}{T_y} \int_0^{T_y} Y_n \cos(n\omega_y t + \varphi_n)\, dt = \frac{1}{T_y} \left[\frac{Y_n}{n\omega_y} \sin(n\omega_y t + \varphi) \right]_0^{T_y} = 0$$

Seule la composante continue a une valeur moyenne non-nulle.

$$\langle y \rangle = \frac{1}{T_y} \int_0^{T_y} Y_0\, dt = Y_0$$

3 Valeur efficace

La valeur efficace d'un signal périodique $y(t)$ de période T est : $\boxed{y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} y^2(\tau) \mathrm{d}\tau}}$

Un voltmètre ou un ampèremètre en mode AC (*Alternative Current*) mesure la valeur efficace du signal.

Le réseau électrique (ou secteur) délivre un signal sinusoïdal de fréquence 50 Hz et de tension efficace 230 V.

a Cas d'un signal sinusoïdal

La valeur efficace d'un signal sinusoïdal $y(t) = Y \cos(\omega t + \varphi)$ est $\dfrac{Y}{\sqrt{2}}$.

Démonstration : $y^2(t) = Y^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{Y^2}{2} (1 + \cos[2(\omega t + \varphi)])$
Le signal $\cos[2(\omega t + \varphi)]$ *est périodique de pulsation 2ω, soit de période $T/2$, donc sa valeur moyenne sur une période T est nulle.*
$\langle y^2 \rangle = \dfrac{Y^2}{2} (\langle 1 \rangle + \langle \cos[2(\omega t + \varphi)] \rangle) = \dfrac{Y^2}{2}$, *ainsi* $y_{\mathit{eff}} = \sqrt{\langle y^2 \rangle} = \frac{Y}{\sqrt{2}}$

b Cas d'un signal périodique quelconque

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

La puissance transportée par un signal étant proportionnelle au carré de sa valeur efficace, cette relation traduit que la puissance du signal est la somme des puissance transportées par ses harmoniques.

Démonstration : Un signal périodique quelconque $y(t)$ de pulsation ω_y se décompose en série de Fourier : $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(t)$ *où* $y_0(t) = Y_0$ *et* $y_n(t) = Y_n \cos(n\omega_y t + \varphi_n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

$$y^2(t) = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} y_n(t) \right] \left[\sum_{p=0}^{+\infty} y_p(t) \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n^2(t) + \sum_{n \neq p}^{+\infty} y_n(t) y_p(t)$$

Or $\cos(n\omega_y t + \varphi_n) \cos(p\omega_y t + \varphi_p) = \frac{1}{2} [\cos((n+p)\omega_y t + \varphi_n + \varphi_p) + \cos((n-p)\omega_y t + \varphi_n - \varphi_p)]$, *donc seuls les termes diagonaux ($n = p$) ont une valeur moyenne non nulle, donc*

$$y_{\mathit{eff}}^2 = \langle y^2 \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle y_n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} {y_n}_{\mathit{eff}}^2$$

II Analyse fréquentielle d'un filtre linéaire

Un filtre linéaire est un système linéaire, qui recoit un signal d'entrée $e(t)$ et fournit un signal de sortie $s(t)$. Les signaux e et s vérifient une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k s}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{\mathrm{d}^k e}{\mathrm{d}t^k} \tag{1}$$

Le degré du filtre est le maximum de n et m.

Propriété La réponse à une combinaison linéaire de signaux d'entrée $e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$ est la même combinaison linéaire des signaux de sorties correspondant $s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$.

1 Fonction de transfert

Comme tout signal périodique peut se décomposer en série de Fourier, c'est-à-dire en une somme de signaux sinusoïdaux, on étudie la réponse d'un filtre à une excitation sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e)$. En régime permanent, $s(t)$ est un signal sinusoïdal de même pulsation ω, on peut donc utiliser la représentation complexe.

La fonction de transfert est définie par $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}}$.

D'après l'équation différentielle (1), $\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k \underline{s} = \sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k \underline{e}$, d'où $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k}$

Le **gain** du filtre est le module de la fonction de transfert : $\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|}$

La **phase** du filtre est l'argument de la fonction de transfert : $\boxed{\varphi(\omega) = \arg[\underline{H}(j\omega)]}$

2 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode d'un filtre se compose de 2 graphes :

— le graphe du **gain en décibel** $\boxed{G_{\mathrm{dB}} = 20\log G = 20\log|\underline{H}|}$ en fonction de ω (ou f) en échelle logarithmique

— le graphe de la phase φ en fonction de ω (ou f) en échelle logarithmique

Pour tracer le diagramme de Bode asymptotique, on cherche un équivalent de $\underline{H}(j\omega)$ quand $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$. On en déduit un équivalent du gain $G(\omega)$ et un équivalent de la phase $\varphi(\omega)$.

3 Pulsations de coupure et bande passante (à -3 dB)

Les pulsations de coupures sont les pulsations ω_c telles que $\boxed{G(\omega_c) = \frac{G_{\mathrm{ref}}}{\sqrt{2}}}$, [1]

où G_{ref} est un gain de référence dont la définition dépend du type filtre :

— pour un filtre passe-bas $G_{\mathrm{ref}} = G(0)$

— pour un filtre passe-haut $G_{\mathrm{ref}} = G(+\infty)$

— pour un filtre passe-bande $G_{\mathrm{ref}} = G_{\max}$

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = 20\log\left(\frac{G_{\mathrm{ref}}}{\sqrt{2}}\right) = 20\log(G_{\mathrm{ref}}) - 10\log(2) \approx 20\log(G_{\mathrm{ref}}) - 3 \text{ dB}$$

La bande passante (à -3 dB) est l'ensemble des pulsations (ou fréquences) telles que $\boxed{G(\omega) \geq \frac{G_{\mathrm{ref}}}{\sqrt{2}}}$

1. La $\sqrt{\ }$ vient du fait que la puissance du signal $s(t)$ est proportionnelle à S^2. Une division par 2 de la puissance correspond donc à une division par $\sqrt{2}$ de l'amplitude.

III Effets du filtrage

1 Réponse d'un filtre à une entrée sinusoïdale

On envoie en entrée d'un filtre linéaire, un signal $e(t) = E\cos(\omega_e t + \varphi_e)$. La sortie est un signal sinusoïdal à la même pulsation $s(t) = S\cos(\omega_e t + \varphi_s)$.

$\underline{S} = \underline{H}(j\omega_e)\underline{E}$, donc $\boxed{\begin{cases} S = G(\omega_e)E \\ \varphi_s = \varphi(\omega_e) + \varphi_e \end{cases}}$ Ainsi, $s(t) = G(\omega_e)E\cos[\omega_e t + \varphi_e + \varphi(\omega_e)]$

2 Réponse d'un filtre à une entrée périodique quelconque

On envoie en entrée d'un filtre linéaire, un signal $e(t)$ périodique de pulsation ω_e. Le signal d'entrée se décompose en série de Fourier :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n)$$

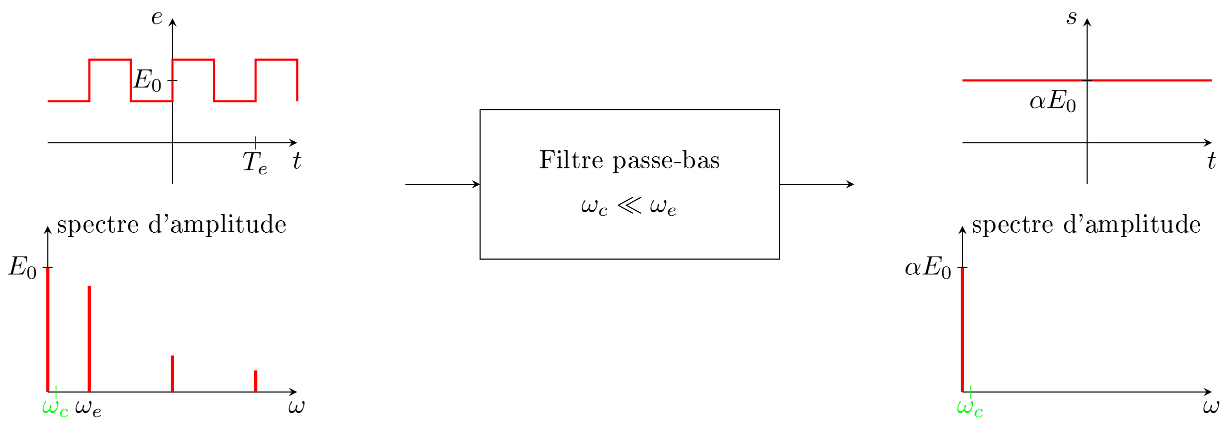
On en déduit le signal de sortie : $s(t) = G(0)E_0\cos[\varphi(0)] + \sum_{n=1}^{+\infty} G(n\omega_e)E_n\cos[n\omega_e t + \varphi_n + \varphi(n\omega_e)]$

3 Moyenneur

Un filtre se comporte en moyenneur lorsque la sortie est proportionnelle à la valeur moyenne de l'entrée, soit

$$\boxed{s(t) = \alpha\langle e\rangle}$$

Pour cela, le filtre doit couper (fortement atténuer) tous les harmoniques du signal sauf la composante continue. Il faut donc utiliser un **filtre passe-bas, dont la pulsation de coupure est petite devant la pulsation du signal, soit** $\omega_c \ll \omega_e$.



4 Dérivateur

Un filtre se comporte en dérivateur lorsque la sortie est proportionnelle à la dérivée de l'entrée, soit $s(t) = \alpha\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ c'est-à-dire $\underline{s}(t) = \alpha j\omega\underline{e}(t)$, d'où $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \alpha j\omega}$.

Il n'est pas possible de réaliser un dérivateur idéal, car $G = |\underline{H}(j\omega)| \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

5 Intégrateur

Un filtre se comporte en intégrateur lorsque la sortie est proportionnelle à la primitive de l'entrée, soit $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \alpha e(t)$ c'est-à-dire $j\omega\underline{s}(t) = \alpha\underline{e}(t)$, d'où $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega}}$.

Il n'est pas possible de réaliser un intégrateur idéal, car $G = |\underline{H}(j\omega)| \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

IV Modèles de quelques filtres

Les résultats de cette partie ne sont pas à apprendre par cœur, mais à savoir retrouver à partir de la fonction de transfert donnée.

1 Filtre passe-bas du 1er ordre

Fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{G_{\text{ref}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

Asymptotes à basse fréquence ($\omega \ll \omega_c$) : $\underline{H}(j\omega) \to G_{\text{ref}}$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} \to 20\log G_{\text{ref}} \\ \varphi \to 0 \end{cases}$

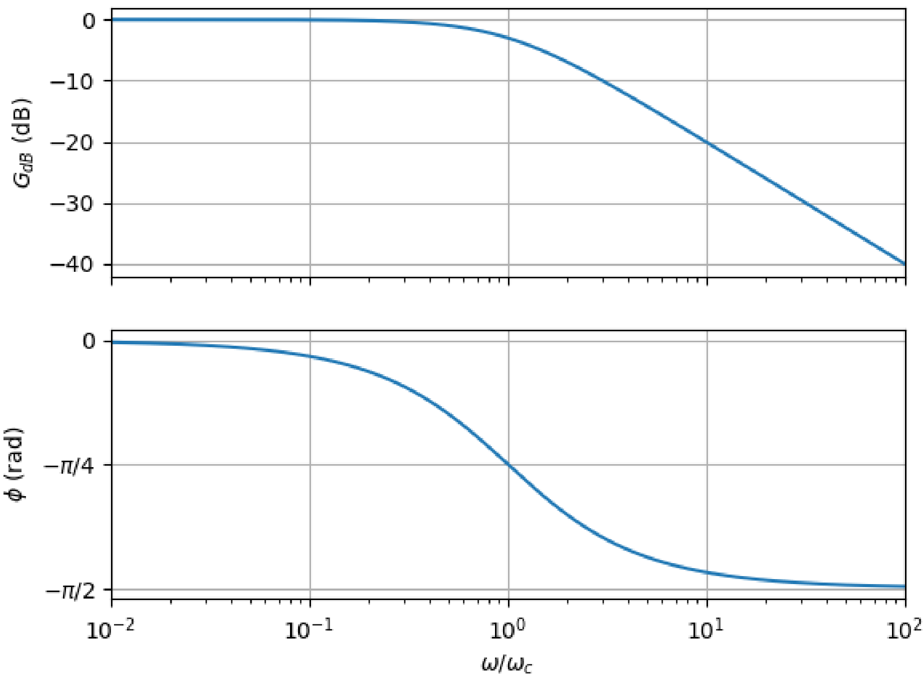
Asymptotes à haute fréquence ($\omega \gg \omega_c$) : $\underline{H}(j\omega) \sim -jG_{\text{ref}}\frac{\omega_c}{\omega}$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20\log(G_{\text{ref}}) - 20\log(\frac{\omega}{\omega_c}) \\ \varphi \to -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Le filtre se comporte en intégrateur à haute fréquence.
$G(\omega) \underset{\omega \gg \omega_c}{\to} 0$ donc le filtre peut servir de moyenneur pour $\omega_e \gg \omega_c$.

Gain et phase à $\omega = \omega_c$: $\underline{H}(j\omega_c) = \frac{G_{\text{ref}}}{1+j}$ donc $\begin{cases} G = \frac{G_{\text{ref}}}{\sqrt{2}}, \text{ soit } G_{\text{dB}} = 20\log(G_{\text{ref}}) - 3 \text{ dB} \\ \varphi = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

ω_c est donc bien la pulsation de coupure. La bande passante est $[0, \omega_c]$.

Diagramme de Bode



2 Filtre passe-haut du 1er ordre

Fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{G_{\text{ref}}}{1 + \frac{\omega_c}{j\omega}}$

Asymptotes à basse fréquence ($\omega \ll \omega_c$) : $\underline{H}(j\omega) \sim jG_{\text{ref}}\frac{\omega}{\omega_c}$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20\log(G_{\text{ref}}) + 20\log(\frac{\omega}{\omega_c}) \\ \varphi \to \frac{\pi}{2} \end{cases}$

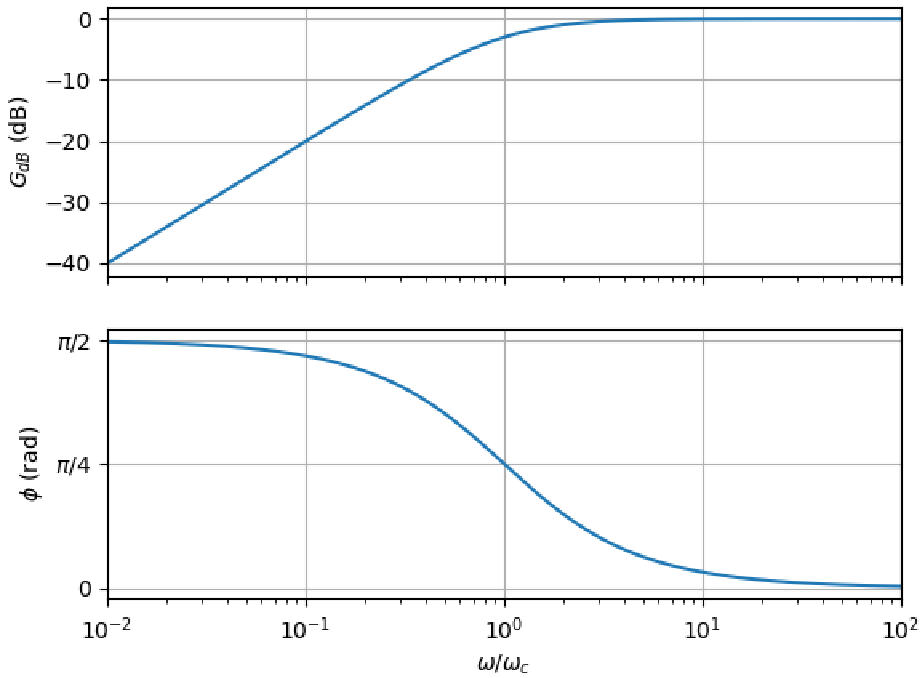
Le filtre se comporte en dérivateur à basse fréquence.
$G(\omega) \underset{\omega \to 0}{\to} 0$ donc le filtre coupe la composante continue.

Asymptotes à haute fréquence ($\omega \gg \omega_c$) : $\underline{H}(j\omega) \to G_{\text{ref}}$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} \to 20\log G_{\text{ref}} \\ \varphi \to 0 \end{cases}$

Gain et phase à $\omega = \omega_c$: $\underline{H}(j\omega_c) = \frac{G_{\text{ref}}}{1-j}$ donc $\begin{cases} G = \frac{G_{\text{ref}}}{\sqrt{2}}, \text{ soit } G_{\text{dB}} = 20\log(G_{\text{ref}}) - 3 \text{ dB} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

ω_c est donc bien la pulsation de coupure. La bande passante est $[\omega_c, +\infty[$.

Diagramme de Bode



3 Filtre passe-bas du 2ème ordre

Fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{G_{\text{ref}}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$

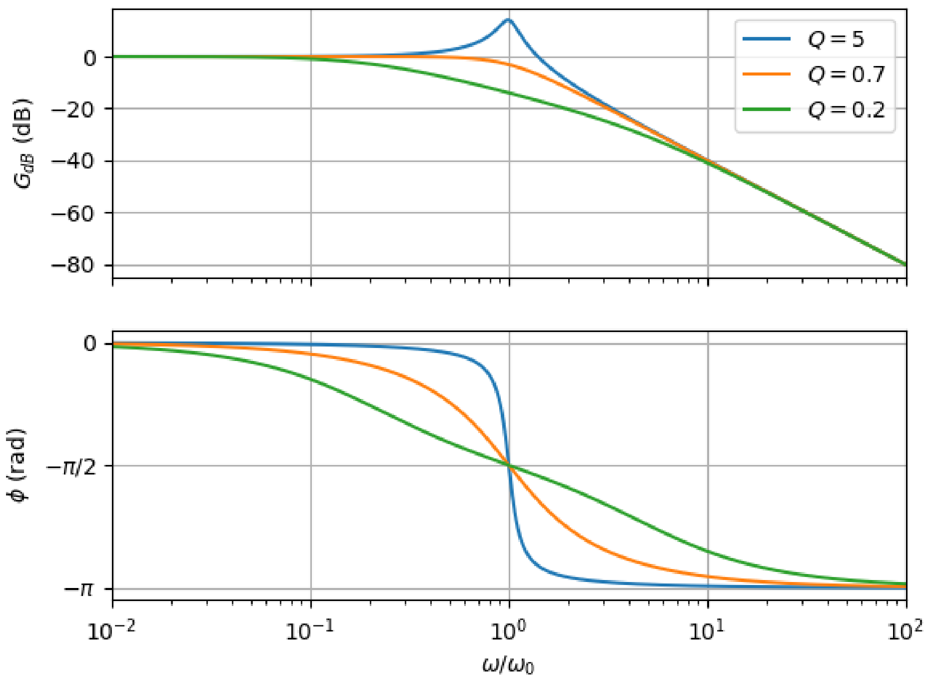
Asymptotes à basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \to G_{\text{ref}}$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} \to 20\log G_{\text{ref}} \\ \varphi \to 0 \end{cases}$

Asymptotes à haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \sim -G_{\text{ref}}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20\log(G_{\text{ref}}) - 40\log(\frac{\omega}{\omega_0}) \\ \varphi \to -\pi \text{ car } \text{Im}\left[\underline{H}(j\omega)\right] < 0 \end{cases}$

$G(\omega) \underset{\omega \gg \omega_0}{\to} 0$ donc le filtre peut servir de moyenneur pour $\omega_e \gg \omega_0$.

Gain et phase à $\omega = \omega_0$: $\underline{H}(j\omega_0) = -jG_{\text{ref}}Q$ donc $\begin{cases} G = G_{\text{ref}}Q \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Diagramme de Bode



Condition de résonance

$G = \dfrac{G_{\text{ref}}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{\omega}{Q\omega_0})^2}} = \dfrac{G_{\text{ref}}}{\sqrt{f(\frac{\omega}{\omega_0})}}$ avec $f(x) = (1 - x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2$

On étudie les variations de f sur $\mathbb{R}_+$: $f'(x) = 2(1 - x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2} = 2x(2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2})$

$f'(x) \geq 0$ (avec $x \geq 0$) $\Leftrightarrow 2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 - \frac{1}{2Q^2}$

f' change de signe si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$, c'est-à-dire $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\approx 0,7$: c'est la condition de résonance.

Si il y a résonance, f est minimale en $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, donc G est maximal en $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

4 Filtre passe-bande du 2ème ordre

Fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{G_{\text{ref}}}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$

Asymptotes à basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \sim j\frac{G_{\text{ref}}}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20\log(\frac{G_{\text{ref}}}{Q}) + 20\log(\frac{\omega}{\omega_0}) \\ \varphi \to \frac{\pi}{2} \end{cases}$

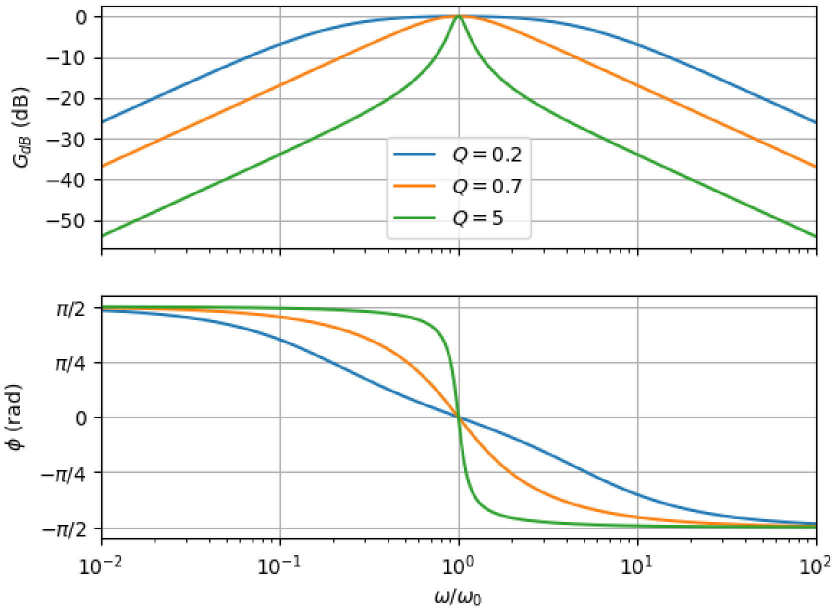
Le filtre se comporte en dérivateur à basse fréquence.
$G(\omega) \underset{\omega \to 0}{\to} 0$ donc le filtre coupe la composante continue.

Asymptotes à haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \sim -j\frac{G_{\text{ref}}}{Q}\frac{\omega_0}{\omega}$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20\log(\frac{G_{\text{ref}}}{Q}) - 20\log(\frac{\omega}{\omega_0}) \\ \varphi \to -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Le filtre se comporte en intégrateur à haute fréquence.

Gain et phase à $\omega = \omega_0$: $\underline{H}(j\omega_0) = G_{\text{ref}}$ donc $\begin{cases} G = G_{\text{ref}} \\ \varphi = 0 \end{cases}$

Diagramme de Bode



Résonance

$$G = \frac{G_{\text{ref}}}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

Le terme $(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2 \geq 0$ est minimal lorsqu'il s'annule, c'est-à-dire en $\omega = \omega_0$, donc G admet un maximum en ω_0.

Bande passante

On cherche les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} telles que $G = \dfrac{G_{\text{ref}}}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c})^2}} = \dfrac{G_{\text{ref}}}{\sqrt{2}}$,
c'est-à-dire $Q^2(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c})^2 = 1$, d'où $\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} = \pm\frac{1}{Q}$, soit $\omega_c^2 \pm \frac{\omega_0}{Q}\omega_c - \omega_0^2 = 0$

Le discriminant de ces 2 équations est : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2 > 0$

Les 4 solutions de ces 2 équations sont donc : $\omega_c = \pm\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{2Q}(\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2})$

ω_{c1} et ω_{c2} sont les 2 solutions positives : $\omega_{c_1^2} = \frac{\omega_0}{2Q}(\sqrt{1 + 4Q^2} \pm 1)$

La bande passante est l'intervalle $[\omega_{c_1}, \omega_{c_2}]$. La largeur de la bande passante est $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c_1}$, soit $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}}$.

Ainsi, le filtre est d'autant plus sélectif que Q est grand.

5 Filtre passe-haut du 2ème ordre

Fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{G_{\text{ref}}}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega_0}{Qj\omega}}$

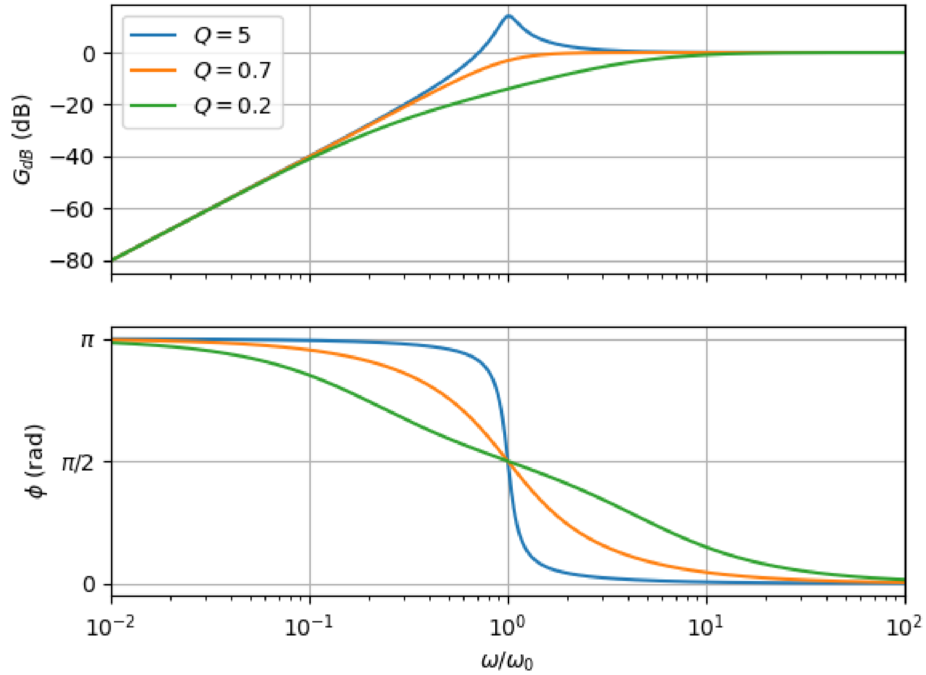
Asymptotes à basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \sim -G_{\text{ref}}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20\log(G_{\text{ref}}) + 40\log(\frac{\omega}{\omega_0}) \\ \varphi \to \pi \text{ car } \operatorname{Im}[\underline{H}(j\omega)] > 0 \end{cases}$

$G(\omega) \underset{\omega \to 0}{\to} 0$ donc le filtre coupe la composante continue.

Asymptotes à haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \to G_{\text{ref}}$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} \to 20\log G_{\text{ref}} \\ \varphi \to 0 \end{cases}$

Gain et phase à $\omega = \omega_0$: $\underline{H}(j\omega_0) = jG_{\text{ref}}Q$ donc $\begin{cases} G = G_{\text{ref}}Q \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Diagramme de Bode



Condition de résonance

$G = \dfrac{G_{\text{ref}}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + (\frac{\omega_0}{Q\omega})^2}} = \dfrac{G_{\text{ref}}}{\sqrt{f(\frac{\omega_0}{\omega})}}$ avec $f(x) = (1 - x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2$

C'est la même fonction f que dans le cas du filtre passe-bas du 2ème ordre (mais attention, ici $x = \frac{\omega_0}{\omega}$).

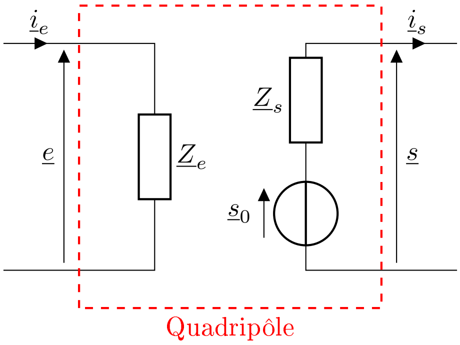
f' change de signe si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$, c'est-à-dire $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\approx 0,7$: c'est la condition de résonance.

Si il y a résonance, f est minimale en $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, donc G est maximal en $\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$.

V Mise en cascade de filtres de tension

1 Impédances d'entrée et de sortie d'un quadripôle passif

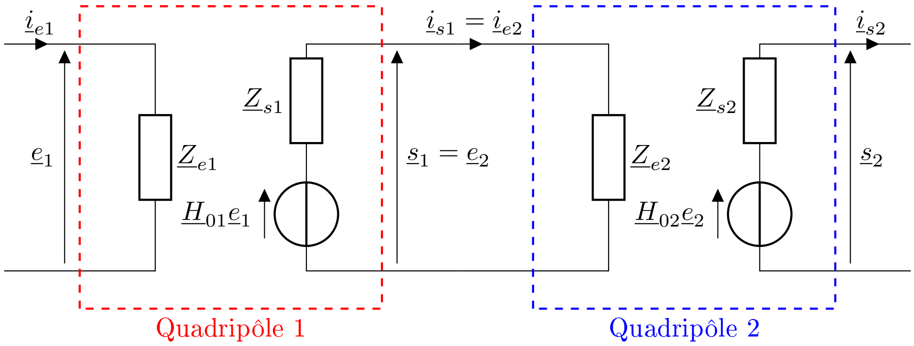
Un filtre de tension est un quadripôle. En régime sinusoïdal forcé, un quadripôle linéaire passif (constitué uniquement de dipôles linéaires passifs : résistances, condensateurs et bobines) est équivalent à un quadripôle de la forme suivante :



$\underline{Z}_e$ est appelée impédance d'entrée du filtre et $\underline{Z}_s$ impédance de sortie.

La tension de sortie s'écrit $\underline{s} = \underline{s}_0 - \underline{Z}_s\underline{i}_s$. En sortie ouverte, c'est-à-dire lorsque $\underline{i}_s = 0$, on a $\underline{s} = \underline{s}_0$.
On note $\underline{H}_0 = \dfrac{\underline{s}_0}{\underline{e}}$ la fonction de transfert en sortie ouverte.

2 Mise en cascade



La fonction de transfert du filtre global est $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}_2}{\underline{e}_1}$.

En sortie ouverte ($\underline{i}_{s2} = 0$), $\underline{H}_0 = \dfrac{\underline{H}_{02}\underline{e}_2}{\underline{e}_1}$, or, d'après le diviseur de tension, $\underline{e}_2 = \dfrac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}}\underline{H}_{01}\underline{e}_1$, donc

$$\underline{H}_0 = \frac{\underline{H}_{02}\underline{H}_{01}}{1 + \frac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{e2}}}$$

Pour que le filtre global réalise les fonctions des filtres 1 et 2 en sorties ouvertes, il faut que $\underline{H}_0 \approx \underline{H}_{02}\underline{H}_{01}$, soit $|\underline{Z}_{s1}| \ll |\underline{Z}_{e2}|$. Ainsi, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, il est préférable de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.