Chapitre
Développements limités et applications

I Définitions

I.1 Rappel sur o

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle et $a \in \overline{I}$ (donc a n'est pas nécessairement dans I).
On rappelle que $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ ou $f(x) = \mathrm{o}_a(g(x))$ signifie que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ce qui revient à dire qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \qquad \text{où} \quad \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

Propriétés (Propriétés calculatoires de o)

Au voisinage de 0 :

- $x^p = \mathrm{o}(x^n)$ si $p > n$
- $\mathrm{o}(x^p) = \mathrm{o}(x^n)$ si $p > n$
- $\mathrm{o}(x^p) + \mathrm{o}(x^n) = \mathrm{o}(x^{\min(n,p)})$
- $\mathrm{o}(x^n) + \lambda \mathrm{o}(x^n) = \mathrm{o}(x^n)$
- $\mathrm{o}(x^n) \times \mathrm{o}(x^p) = \mathrm{o}(x^{n+p})$
- $x^n \times \mathrm{o}(x^p) = \mathrm{o}(x^{n+p})$
- $\dfrac{\mathrm{o}(x^n)}{x^p} = \mathrm{o}(x^{n-p})$ si $p \leqslant n$
- $f(x) = \mathrm{o}(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$

NB : ces égalités se lisent de la gauche vers la droite, il n'y a pas symétrie. Par exemple $\mathrm{o}(x^3) = \mathrm{o}(x^2)$ se lit "un petit $\mathrm{o}(x^3)$ est un petit $\mathrm{o}(x^2)$" mais l'inverse n'est pas vrai.

I.2 Les développements limités

Définition (Développement limité)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet **un développement limité à l'ordre** n **au voisinage de** a (noté $\mathrm{DL}_n(a)$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que:

$$f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n),$$

où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
$P(x-a) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$ est appelée **la partie régulière** du développement limité.

☞ **Explication** ☜ Remarquant que $\underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, d'autant plus vite que n est grand, un développement limité approche une fonction au voisinage d'un point par une fonction polynomiale avec une précision d'autant plus grande que n est grand.

Remarques

1) **Se ramener au voisinage de 0.** Tout développement limité au voisinage de a peut être ramené à un développement limité au voisinage de 0. Si $f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)$ alors $g(x) = f(x+a) = P(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$.

2) **Troncature de DL.** Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_m(a)$ pour tout $m \leqslant n$ appelé **troncature à l'ordre** m. Par exemple si:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underbrace{a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^3\right)}_{=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a))}.$$

Alors, en tronquant à l'ordre 1, on obtient

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)).$$

3) **Un DL donne un équivalent.** Supposons que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n).$$

Les premiers termes sont éventuellement nuls. Notons p l'indice du premier terme non nul (s'il existe), et on tronque à l'ordre p pour obtenir

$$f(x) = a_p(x-a)^p + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^p) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

Le premier terme non nul d'un DL est un équivalent de la fonction au voisinage du point considéré.

Notre premier DL Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)}$.

En remplaçant x par $-x$, x par $-x^2$, x par x^2 on obtient les autres DL, on obtient les autres DL :

$$\boxed{\mathrm{DL}_n(0) : \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)}.$$

$$\boxed{\mathrm{DL}_{2n}(0) : \qquad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n}\right) = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n}\right)}.$$

$$\boxed{\mathrm{DL}_{2n}(0) : \qquad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n}\right) = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n}\right)}.$$

Théorème (Unicité des DL)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f admette un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors la partie régulière est unique.

I.3 Quelques propriétés

Théorème (Continuité, dérivabilité et DL)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $\boxed{a \in I}$.

1) f est continue en a si et seulement si f possède un $\mathrm{DL}_0(a)$.
   Dans ce cas : $\quad f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(1)$. Le coefficient d'ordre 0 est $f(a)$.

2) f est dérivable en a si et seulement si f possède un $\mathrm{DL}_1(a)$.
   Dans ce cas : $\quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)$. Le coefficient d'ordre 1 est $f'(a)$.

Remarques

- **UN DL n'existe pas forcément...** Toute fonction définie en a n'admet donc pas forcément en $\mathrm{DL}_n(a)$. Par exemple, si f n'est pas dérivable en a alors f n'admet pas de $\mathrm{DL}_n(a)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- **Pas de généralisation à $n \geqslant 2$.** Le résultat est faux si $n \geqslant 2$. Par exemple f peut admettre un $\mathrm{DL}_2(a)$ sans que $f''(a)$ n'existe.
  Contre-exemple : $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
- **Partie régulière nulle à tout ordre.** Une fonction peut admettre un DL de partie principale nulle à tout ordre sans être nulle.
  Par exemple, posons $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
  car par croissances comparées $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Théorème (DL et parité)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \in \overline{I}$ et f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\,.$$

1) Si f est paire, alors les coefficients d'indice impair sont nuls.

2) Si f est impaire, alors les coefficients d'indice pair sont nuls.

II Obtenir un DL

II.1 Intégration des DL

Théorème (Primitivation des DL)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f' possède un $\mathrm{DL}_n(a)$:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$

Alors f possède un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ obtenu en primitivant la partie régulière et en ajoutant $f(a)$:

$$f(x) = \boxed{f(a)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}}_{\text{primitive de } x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k} + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^{\boxed{n+1}}\right).$$

D'autres DL **donc ...**

$\mathrm{DL}_n(0)$: $\quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$
$\mathrm{DL}_n(0)$: $\quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$
$\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$: $\quad \mathrm{Arctan}\, x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right).$

II.2 Formule de Taylor-Young

Théorème (Formule de Taylor-Young)

- Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $a \in I$. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$

  Cette formule est appelée **formule de Taylor-Young de f au voisinage de a à l'ordre n.** On peut la réécrire au voisinage de 0:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n).$$

- Conséquence : si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I alors f admet un DL à tout ordre au voisinage de a.

NB : ce théorème est donc un théorème d'existence de DL.

$$\boxed{\mathrm{DL}_n(0): \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)}$$

$$\boxed{\mathrm{DL}_{2p+2}(0): \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2p+2}\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2p+2}\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{DL}_{2p+1}(0): \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2p+1}\right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2p+1}\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{DL}_{2p+2}(0): \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2p+2}\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2p+2}\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{DL}_{2p+1}(0): \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2p+1}\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2p+1}\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{DL}_n(0): \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)}$$

$$\boxed{\mathrm{DL}_3(0): \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)}.$$

$$\boxed{\mathrm{DL}_3(0): \qquad \operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)}.$$

$$\boxed{\mathrm{DL}_3(0): \qquad \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)}.$$

Exercice

1) Écrire les DL des fonctions suivantes au voisinage de 0 à l'ordre indiqué :

$$\exp \;\text{(ordre 3)} \qquad \cos \;\text{(ordre 5)} \qquad \sin \;\text{(ordre 5)} \qquad \frac{1}{1+x^2}\;\text{(ordre 3)} \qquad \sqrt[3]{1+x}\;\text{(ordre 3)}\;.$$

2) Écrire le $\mathrm{DL}_2(3)$ de exp.

II.3 Opérations sur les développements limités

Théorème (Opérations sur les DL)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Supposons que f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(a)$:

$$f(a+h) = P(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n) \qquad g(a+h) = Q(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n) \qquad \text{où } (P,Q) \in (\mathbb{K}_n[X])^2.$$

Alors,

1) $f+g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$: $\quad (f+g)(a+h) = (P+Q)(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$

2) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λf admet un $\mathrm{DL}_n(a)$: $\quad (\lambda f)(a+h) = (\lambda P)(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$

3) fg admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ obtenu en tronquant PQ au degré n: $\quad (fg)(a+h) = C(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$ où C est le polynôme PQ tronqué au dégré n.

Remarques

- ⚠ **Attention** ⚠ Le produit de deux DL_n n'est pas un DL à l'ordre $2n$. On ne tient pas compte des termes de degré $> n$.
- Partez du principe que pour obtenir, un DL_n de fg, il faut prendre un DL_n de f et de g, même si c'est vrai, il y a des exceptions.

Exercice.

1) Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x} - 2\cos x$.
2) Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sin^2 x\sqrt{1-x}$.
3) Retrouver les DL_{2n} de ch et sh.

Théorème (Composition)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $u : I \to \mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$. On suppose que f et u admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$ avec $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$,

$$f(h) = P(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n) \qquad u(h) = Q(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n) \qquad \text{où } (P,Q) \in (\mathbb{K}_n[X])^2.$$

Alors $f \circ u$ possède un $\mathrm{DL}_n(0)$:

$$(f \circ u)(h) = C(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)\,,$$

où C est le polynôme $P \circ Q$ tronqué au degré n.

Exercice.

1) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\sqrt{1+\sin x}$.
2) Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln(\cos x)$.
3) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\mathrm{e}^{\sqrt{1-x}}$.

✎ **Méthode pratique** ✎ **($DL_n(0)$ ou DA (développement asymptotique) de $\dfrac{1}{f}$)**

Objectif se ramener à $\dfrac{1}{1+u}$ et utiliser le DL de $\dfrac{1}{1+u}$.

- On détermine le $DL_n(0)$ de f.
- On remplace f par son DL dans $\dfrac{1}{f}$ et on fait apparaître la forme $\dfrac{1}{1+u}$ (en factorisant le dénominateur).
- On compose alors les DL.

NB : il est toujours possible d'obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{f}$ lorsque f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et $f(0) \neq 0$.

Le dernier DL du formulaire...

$$\boxed{\mathrm{DL}_7(0) : \qquad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathrm{o}(x^7)}.$$

Exercice.

1) Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{1}{2+\ln(1+x^2)}$.
2) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

⚠ **Attention** ⚠ Il y a des cas où pour déterminer un DL_n il faut partir d'un DL à un ordre plus élevé, c'est le cas de quotient où il y a des simplifications par x.

Exercice.

1) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{\sin x}{x}$.

2) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$.

✎ **En pratique** ✎ On peut aussi déterminer des développements limités de f au voisinage d'autres points que 0. Pour cela, on détermine un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h \mapsto f(a+h)$.

Exercice.

1) Déterminer le $\mathrm{DL}_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de sin.

2) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(\mathrm{e})$ de $\sqrt{3+\ln x}$.

⚠ **Attention** ⚠ On ne développe surtout pas le polynôme dans l'expression finale du développement limité, qui sous cette forme est plus parlant que sous une forme développée.

Exercice.

1) **DL d'une réciproque.** Retrouver le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan en utilisant le DL_5 de $\mathrm{Arctan}\, c$ et le fait que Arctan est la réciproque de tan.

2) **DL en utilisant une équation différentielle.** Retrouver le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan en utilant $\tan' = 1 + \tan^2$.

II.4 Quelques astuces

- Pour vous souvenir du début d'un DL usuel, pensez au équivalents usuels. Le DL_n de $\ln(1+x)$ commence par x car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$; le DL_n de $\cos x$ commence par $1 - \frac{x^2}{2}$ car $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$...
- Le DL d'une fonction paire n'a que des puissances paires (cos, $\mathrm{ch}\, x$...). Le DL d'une fonction impaire n'a que des puissances impaires (sin, $\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{Arctan}\, x$).
- La valuation des parties régulières permet de faire des économies sur l'ordre des DL choisis au départ du calcul.
- Le signe du premier terme non nul après celui de degré 1 peut-être retrouvé par la position de la courbe par rapport à la tangente.

III Applications

III.1 Recherche d'équivalents et calcul de limites

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Calcul d'équivalents)**

- Pour déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de a, on effectue un DL a un ordre suffisant, l'équivalent est alors **le premier terme non nul du** DL.
  L'usage des DL est particulièrement avantageux lorsque $f(x)$ se présente sous la forme d'une somme car dans ce cas on ne peut sommer les équivalents.
- Pour déterminer un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$, on effectue si besoin le changement de variable $h = \frac{1}{n}$ pour se ramener à des DL_0.
- Rappelons que le calcul d'équivalents est utile pour le calcul de limites (produit, quotient) et aussi pour déterminer le signe d'une fonction au voisinage d'un point.

Exercice.

1) Déterminer un équivalent en 0 de $\sin^2 x - \ln(1+x^2)$.

2) Déterminer un équivalent de $\dfrac{\sin^3 x - \tan^3 x}{x^4}$.

3) Calculer la limite en 0 de $\dfrac{2\sin(x) - \mathrm{sh}(2x)}{\ln(1+x^2)}$.

4) Calculer la limite en $+\infty$ de $n^2\left(\exp(\frac{3}{n}) - \sqrt{1+\frac{6}{n}}\right)$.

III.2 Tangente à une courbe

✎ Méthode pratique ✎ (Méthode pratique)

Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ admette un $\mathrm{DL}_n(a)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$

Alors :

- l'équation de la tangente T_a au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
- la position de la tangente T_a par rapport à $\mathcal{C}_f$ est donnée par l'équivalent :

$$f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \underset{x\to a}{\sim} a_k(x-a)^k.$$

  - Si k est pair, $a_k(x-a)^k$ est du signe de a_k au voisinage de a, la courbe est donc située au-dessus ou en dessous de T_a au voisinage de a.
  - Si k est impair, $a_k(x-a)^k$ change de signe au voisinage de a, la tangente “traverse” la courbe en un point d'inflexion.

1) Étude locale en 0 (tangente, son équation, sa position) de $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$.

2) Étude locale en 0 (tangente, son équation, sa position) de $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$.

III.3 Calcul des dérivées n-ièmes en a

✎ Méthode pratique ✎ (Calcul des dérivées n-ièmes)

Soient f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$. Si on dispose du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$

alors la formule de Taylor-Young et l'unicité de la partie régulière permettent d'identifier les coefficients : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Exercice.

1) Déterminer les dérivées première et seconde en 0 des fonctions des exemples ci-dessus.

III.4 Extremum local

Théorème (Condition suffisante d'existence d'un extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $a \in \mathring{I}$. On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_p(a)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^p\right) \qquad \text{avec } a_p \neq 0.$$

1) Si $a_1 \neq 0$, f n'admet pas d'extremum local en a.

2) Si $a_1 = 0$ alors f admet a_0 pour extremum local en a si et seulement si p est pair.
Dans ce cas a est un minimum local (resp. maximum local) si $a_p > 0$ (resp. $a_p < 0$).

Exercice. Prouver que la fonction définie pat $f(x) = (x - 1 - 2\ln 2)\ln(x+1)$ admet un minimum local en 1.

III.5 Prolongement d'une fonction

✎ **Méthode pratique** ✎ **(DL pour prolongement par continuité et assurer la dérivabilité)**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f admet un $DL_1(a)$, $f(x) = \alpha + \beta(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)$.
Alors

- f se prolonge par continuité en a en posant $f(a) = \alpha$
- le prolongement de f est dérivable en a avec $f'(a) = \beta$.

Exercice.

1) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0.

2) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0.

III.6 Développements asymptotiques

☞ **Explication** ☜ Il n'est pas toujours possible d'obtenir le développement limité car il n'existe pas toujours. On peut avoir recours dans certains cas à un développement asymptotique (qui généralise la notion de développements limités). Un développement asymptotique de f au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ à la précision $a_n(x)$, est de la forme :

$$f(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(a_n(x))$$

où les a_k sont des fonctions vérifiant $a_k(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(a_{k-1}(x))$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

✎ **En pratique** ✎ On détermine un développement asymptotique à l'aide des formules de DL et les opérations sur les DL et les o.

Exercice.

1) Déterminer un développement asymptotique de $\dfrac{\sin x}{x^2}$ au voisinage de 0 à la précision x^2.

2) Déterminer un développement asymptotique de $\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ au voisinage de 0 à la précision x^2.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Méthode pratique)**

Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ admette un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$)

$$f(x) = \alpha x + \beta + \gamma \frac{1}{x^p} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^p}\right) \text{ où } p \geqslant 1$$

Alors :

- $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote au voisinage de $+\infty$ la droite Δ d'équation : $y = \alpha x + \beta$
- la position de Δ par rapport à $\mathcal{C}_f$ est donnée par le signe de l'équivalent : $f(x) - (\alpha x + \beta) \underset{+\infty}{\sim} \gamma \dfrac{1}{x^p}$.

Exercice. Montrer que la courbe représentative de $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cos \dfrac{1}{x}$ admet une asymptote en $\pm\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote