Chapitre Convexité

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de R.

I Fonctions convexes

Définition (Fonctions convexes)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est **convexe** si:

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

- On dit que f est **concave** si $-f$ est convexe c'est-à-dire si:

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

☞ **Explication** ☜ **Interprétation graphique de cette définition**. Soit $(x,y) \in I^2$ avec $x < y$. Pour tout $\lambda \in [0,1]$ on considère les points données par leurs coordonnées

$$M_\lambda(\ \lambda x + (1-\lambda)y\ ,\ f(\lambda x + (1-\lambda)y)\ ) \qquad F_\lambda(\ \lambda x + (1-\lambda)y\ ,\ \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\ ).$$

f est convexe signifie alors que le point M_λ est sous le point F_λ pour tout $\lambda \in [0,1]$.
Or, quand λ décrit $[0,1]$,

- $\lambda x + (1-\lambda)y$ décrit le segment $[x,y]$
- M_λ décrit l'arc de $\mathcal{C}_f$ compris entre les points M_0, M_1 d'abscisses x et y
- F_λ décrit le segment $[M_0, M_1]$

La convexité signifie alors que le sous-arc de $\mathcal{C}_f$ associé à $[x,y]$ est sous la corde $[M_0, M_1]$.

Théorème (Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.
Le graphe de f est situé sous sa sécante sur $[x, y]$ et au-dessus en dehors de $[x, y]$.

Remarques

1) ⚠ **Attention** ⚠ Convexe n'est pas le contraire de concave. Exemple de fonction ni convexe, ni concave :

2) f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.
Conséquence : tous les résultats sur les fonctions convexes s'adaptent donc aux fonctions concaves.

Exercice. Montrer que la fonction valeur absolue est convexe.

Théorème (Inégalité de Jensen)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Théorème (Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est convexe

(ii) Pour tout $a \in I$, l'application $\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$ est croissante.

Exercice. A connaître Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe où I est supposé **ouvert**. Montrer que f est continue sur I.
Le résultat est-il encore vrai si I n'est pas ouvert.

Exemple La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe car pour tout $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$ est une application croissante

Corollaire (Lemme des trois pentes)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < b < c$. Alors

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

II Fonctions convexes dérivables

Théorème (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Les propositions suivantes sont équivalentes

(i) f convexe

(ii) f' croissante

(iii) $\mathcal{C}_f$ est situé au-dessus de toutes ses tangentes.

Corollaire (Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I. Alors : f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.

Exemples Les fonctions exp, $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \geqslant 1$ sont convexes.

Exercice.

1) **Exemple type**. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $x+1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant (\mathrm{e}-1)x+1$.

2) Montrer que pour tout $x > 0$, $y > 0$, $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}\ln y$.

3) **Inégalité arithmético-géométrique**. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a

$$\frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Remarques (Sur les points d'inflexion)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $a \in I$. On dit que a est un point d'inflexion pour f si la courbe de f change de concavité en a, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f_{|[a-\varepsilon,a]}$ et $f_{|[a,a+\varepsilon]}$ soient de concavité opposées.
Si de plus f est deux fois dérivable, a est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en a et change de signe.
Si a est un point d'inflexion la tangente traverse la courbe en le point d'abscisse a.