Chapitre
Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Définitions et premières propriétés

Définition (Espace vectoriel)

Un ensemble E est un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** ou **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ s'il est muni d'une loi de composition interne $+$ (notée additivement) et d'une loi de composition externe multiplicative $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda\cdot x \end{array}$, tels que

- $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- Pour tout $(x, y) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x+\mu\cdot x \qquad \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x+\lambda\cdot y \qquad \lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x \qquad 1\cdot x = x \text{ où } 1 \text{ neutre de } \mathbb{K}.$$

L'espace vectoriel est alors noté $(E, +, \cdot)$. Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.
Le neutre 0_E de $+$ est appelé le **vecteur nul**

Exemples

1) L'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan muni de la somme de vecteurs et du produit par un scalaire est un espace vectoriel.
2) $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et $\mathbb{C}$ est à la fois un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
3) $\mathbb{R}^2$ muni des deux opérations :
   - pour $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
   - pour $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.
4) $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
5) $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème (Règles de calculs)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:
   (i) $\lambda x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$
   (ii) $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$. En particulier, $(-1)x = -x$
   (iii) $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.
2) Plus généralément, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des éléments de E, $\lambda, \mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$

   (i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i + \mu\sum_{i=1}^{n} y_i$ (ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i x) = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right) x$.

Définition (Combinaisons linéaires)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- **Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs**. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** de ces vecteurs tout vecteur de la forme:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \qquad \text{où} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

- **Combinaison linéaire d'une famille quelconque de vecteurs**. Soit I un ensemble non vide et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** de ces vecteurs tout vecteur de la forme:

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \qquad \text{où} \quad (\lambda_i)_{i\in I} \text{ est une famille } \textbf{presque nulle} \text{ de scalaires.}$$

NB: une famille presque nulle de scalaires est une famille où seul un nombre fini de scalaires est non nul.

II Construction d'espaces vectoriels

Théorème-Définition (Produit cartésien d'espaces vectoriels)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On munit l'ensemble $E \times F$ de deux lois:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \qquad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

Alors $(E \times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre $(0_E, 0_F)$ et l'opposé de $(x, y) \in E \times F$ est $(-x, -y)$.
Notation : les lois sont toutes notées $+$ ou $\cdot$ qu'elles soient envisagées sur E, F ou $E \times F$.

Remarques (Produit $E_1 \times \cdots \times E_n$)

Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels on munit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de deux lois

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \qquad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Alors $(E_1 \times \cdots \times E_n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})$ et l'opposé de $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ est $(-x_1, \ldots, -x_n)$.

Exemples $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de même $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème (Espace vectoriel E^X)

Soit X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On munit l'ensemble $E^X = \mathcal{F}(X, E)$ de deux lois en posant, pour tout $(f, g) \in (E^X)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$f + g : \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \qquad \qquad \lambda f : \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}.$$

Alors E^X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre $0_{E^X} : x \in X \mapsto 0_E$ (l'application nulle) et l'opposé de $f \in E^X$ est $-f : x \in X \mapsto -f(x) \in E$.

⚠ **Attention** ⚠ Noter que l'espace de départ n'est pas nécessairement un espace vectoriel.

Exemples

1) Soit I un intervalle. Alors $\mathbb{R}^I$ est un espace vectoriel pour les opérations naturelles d'addition et multiplication par un scalaire.

2) L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, l'ensemble des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

III Sous-espaces vectoriels

III.1 Définition

Définition (Sous-espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.
On dit que F, muni des lois de E restreintes à F, est un **sous-espace vectoriel** de E si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. F est un sous-espace vectoriel de E (sev de E) si et seulement si :

1) F est une partie de E

2) $F \neq \emptyset$ ($0_E \in F$)

3) **Stabilité par combinaisons linéaires**

   (i) F stable par l'addition i.e. : $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$

   (ii) F stable par la multiplication externe i.e. : $\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F$.

   Remarque : 3) (i) et (ii) peuvent être remplacées par :

$$\text{(iii)} \quad \forall (x, y) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in F$$

   ou encore par

$$\text{(iii)'} \quad \forall (x, y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F.$$

Remarques

Dans la très grande majorité des cas, pour montrer qu'un ensemble un espace-vectoriel, on montre qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

✎ Méthode pratique ✎ (1 - Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel)

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

1) On montre que $F \subset E$.

2) On montre que $F \neq \emptyset$ en montrant que $0_E \in F$.

3) Stabilité par combinaisons linéaire : soit $(x, y) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, ..., alors $\lambda x + y \in F$.

Remarque : pour montrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel de E on peut :

- montrer que $0_E \notin F$
- exhiber un contre-exemple qui contredit la stabilité par combinaisons linéaires.

Exemples

1) **Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$.**

   -a- Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x + 5y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   -b- Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x + 2y = 5\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
   Plus généralement, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ ax + by = c\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $c = 0$, F est dans ce cas une droite vectorielle.

   -c- Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) **Plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.**

   -a- Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + 5y + 7z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   -b- Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x + 2y + 4z = 5\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Plus généralement, si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ ax + by + cz = d\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $d = 0$, F est dans ce cas un plan vectoriel.

3) **Espace vectoriel usuel.** L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel.

4) **Espace vectoriel usuel.** L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5) **Espace vectoriel usuel.** L'ensemble solution d'une équation différentielle du premier ordre ou du second ordre linéaire homogène est un espace vectoriel.

6) **Espace vectoriel usuel.** L'ensemble solution d'un système linéaire homogène est un espace vectoriel.

7) **Sous-espaces vectoriels triviaux.** E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Exercice.

1) Montrer que $c_0(\mathbb{N}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ / \ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

2) Montrer que $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \widetilde{P}(1) = \widetilde{P}(2) = 0\right\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Toute intersection (finie ou infinie) de sous-espaces de E est un sous-espace vectoriel de E.

⚠ **Attention** ⚠ La réunion de sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel. Contre-exemple :

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, une droite vectorielle est l'intersection de deux plan vectoriels (où les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels.

III.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Théorème-Définition (Sev engendré par une partie.)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E.

- Si $A \neq \emptyset$ alors $\operatorname{Vect} A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A i.e. :

$$\operatorname{Vect} A = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \ / \ (a_i) \in A^I \text{ et } (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle} \right\}.$$

  Par convention, $\operatorname{Vect} \emptyset = \{0_E\}$.

- $\operatorname{Vect} A$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace vectoriel engendré par** A.
  C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A. On dit aussi que A engendre $\operatorname{Vect} A$. On a l'égalité :

$$\operatorname{Vect} A = \bigcap_{F \text{sev de} E,\ A \subset F} F.$$

- Si A est finie $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ on dit que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une **famille génératrice** de $\operatorname{Vect} A$. On note plutôt $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{Vect}(\{x_1, \ldots, x_n\})$.

Exemples

1) Une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ est :

2) On pose $\varepsilon_1 = (1, 2)$, $\varepsilon_2 = (-1, 1)$. Montrer que $\operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathbb{R}^2$.

3) Une famille génératrice de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel est :
   Une famille génératrice de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel est :

4) Une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ est :

5) Une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$ est :
   Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est :

6) Une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est :
   Une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

✎ Méthode pratique ✎ (Dans $\mathbb{K}^n$: famille génératrice ↔ équations)

Pour les sev de $\mathbb{K}^n$ il faut savoir passer d'une famille génératrice à des équations ou d'équations à une famille génératrice.

- **Famille génératrice → équations** :

$$\textit{(exemple dans } \mathbb{R}^3\textit{)} \quad (x, y, z) \in \operatorname{Vect}(u, v) \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \underbrace{(x, y, z) = \lambda u + \mu v}_{\text{donne un système}}$$

  Il s'agit alors d'étudier la compatibilité du système, les équations de compatibilité sont les équations cherchées.

- **Équations → famille génératrice**. Il faut résoudre l'équation ou le système d'équations, en isolant les inconnues qui sont les inconnues principales que l'on exprime en fonction des inconnues secondaires qui jouent le rôle de coefficients de la combinaison linéaire.

Exercices dans $\mathbb{R}^n$

1) Dans $\mathbb{R}^2$, décrire à l'aide d'équation(s) le sev $F = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ où $\varepsilon_1 = (1, 2)$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, décrire à l'aide d'équation(s) le sev $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, 2, -1)$, $\varepsilon_2 = (2, 3, -4)$.

3) Dans $\mathbb{R}^3$, décrire à l'aide d'équation(s) le sev $F = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ où $\varepsilon_1 = (2, 1, -1)$.

4) Dans $\mathbb{R}^2$, donner une famille génératrice de $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x - 3y = 0\}$.

5) Dans $\mathbb{R}^3$, donner une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 3y + 4z = 0\}$.

6) Dans $\mathbb{R}^3$, donner une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 5z = 0 \text{ et } x + 3y + 4z = 0\}$.

Exercices dans d'autres espaces vectoriels. Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants.

1) $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ \widetilde{P}(3) = 0\}$

2) si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0_2\}$

3) $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \ / \ f'' - 3f' + 2f = 0\}$.

✎ Méthode pratique ✎ (2 - Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel)

Pour montrer que F est un ev, on peut essayer de l'écrire sous la forme

$$F = \text{Vect}(.....).$$

Quand elle s'applique, on préfèrera cette méthode à la caractérisation.

Propriétés (de $\text{Vect}(A)$)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B deux parties de E. Alors:

1) **Croissance de** Vect. $A \subset B \Rightarrow \text{Vect}\, A \subset \text{Vect}\, B$

2) **Caractérisation d'un sev avec** Vect. A sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow \text{Vect}\, A = A$.
Conséquence $\text{Vect}(\text{Vect}\, A)) = \text{Vect}\, A$.

3) **Simplifier une famille génératrice**.

-a- On ne modifie pas $\text{Vect}\, A$ si on retire de A un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs.

-b- On ne modifie pas $\text{Vect}\, A$ si on remplace l'un des vecteurs de A par un vecteur combinaison linéaire de ce premier vecteur et des autres vecteurs de A.

Exercice. Simplication de famille génératrice.

1) Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\varepsilon_1 = (1, 1)$, $\varepsilon_2 = (-2, 3)$, $\varepsilon_3 = (4, 4)$, $\varepsilon_4 = (-1, 4)$. On pose $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$. Simplifier la famille génératrice.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\varepsilon_1 = (1, -2, 3)$, $\varepsilon_2 = (2, 4, 1)$, $\varepsilon_3 = (4, 0, 7)$. On pose $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Simplifier la famille génératrice.

3) Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\varepsilon_1 = (1, -1, 1)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 2)$, $\varepsilon_3 = (2, -1, 2)$, $\varepsilon_4 = (1, 1, 1)$. On pose $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$. Simplifier la famille génératrice.

4) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $P_1 = X^2 - 2X + 1$, $P_2 = 2X^2 - 3X + 4$, $P_3 = 4X - 5$. On pose $F = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$. Simplifier la famille génératrice.

III.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Théorème-Définition (Somme d'espaces vectoriels)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

- On définit la **somme** de F et G par:

  $$F + G = \{x_F + x_G \ / \ x_F \in F \ , \ \ x_G \in G\} = \{x \in E \ / \ \exists (x_F, x_G) \in F \times G \ , \ \ x = x_F + x_G\}.$$

  $F + G$ est donc l'ensemble des éléments de E qui s'écrivent comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

- L'ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.

NB : on peut définir la somme de n sev : $E_1 + \cdots + E_n$.

Illustration.

⚠ **Attention** ⚠ Ne pas confondre $F + G$ et $F \cup G$.

Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors: $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

2) **Concaténation de familles génératrices**.
Soient A et B des parties de E. Alors: $\mathrm{Vect}\, A + \mathrm{Vect}\, B = \mathrm{Vect}(A \cup B)$.
En particulier, soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ des vecteurs de E. Alors:

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) + \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_m) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les parties $F = \{(x, 0, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F + G$.

Méthode pratique (Comment prouver $F+G=E$?)

- **Méthode 1 :** par équivalence. Prendre $x \in E$,

$$x \in F+G \Leftrightarrow \exists (x_F, x_G) \in F \times G \,/\, x = x_F + x_G \Leftrightarrow ...$$

dans ce cas on obtient souvent un système dont il s'agit d'étudier la compatibilité.

- **Méthode 2 :** par double inclusion. *Si la méthode 1 ne s'applique pas.*
  - $\subset$ Car F et G sont des sev de E.
  - $\supset$ Prendre x dans E et prouver que x s'écrit $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
- **Méthode 3 :** à l'aide de familles génératrices.
  - Déterminer une famille génératrice de F, et de G.
  - On concatène les familles génératrices.
  - On simplifie la famille génératrice pour reconnaître une famille génératrice de E.

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ où $\varepsilon_1 = (1,-1)$ et $F = \text{Vect}(\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_2 = (2,-3)$.
Montrer que $F + G = \mathbb{R}^2$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1,-1,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,1)$ et $F = \text{Vect}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ où $\varepsilon_3 = (0,1,0)$, $\varepsilon_4 = (1,1,1)$.
Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

III.4 Sous-espaces supplémentaires

On va justement voir maintenant à quelle condition la décomposititon des vecteurs de $F+G$ est unique.

Définition (Somme directe)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

- F et G sont en **somme directe** si tout vecteur de $F+G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
On note alors $F \oplus G$ au lieu de $F+G$, pour indiquer qu'il y a somme directe.
- Si $F \oplus G = E$ on dit que F et G sont **supplémentaires** dans E c'est-à-dire que tout élément de E s'écrit de manière **unique** comme somme d'un élément de F et d'un élément de G:

$$\forall x \in E, \;\; \exists! \, (x_F, x_G) \in F \times G \,/\, x = x_F + x_G.$$

On dit aussi que F est **un** supplémentaire de G ou que G est **un** supplémentaire de F.

⚠ Attention ⚠

1) Le supplémentaire s'il existe n'est pas unique, on parle donc **d'un** supplémentaire. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$:
sont des supplémentaires de $\text{Vect}((0,1))$ dans $\mathbb{R}^2$.

2) Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire.

Remarques

On verra plus tard que sous de bonnes conditions un sous-espace vectoriel admet toujours un supplémentaire.

Théorème (Caractérisation de la somme directe et des supplémentaires)

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors:

1) F, G sont en somme directe $\Longleftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$

2) F, G sont supplémentaires dans $E \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$.

Méthode pratique (Comment prouver que deux sev sont supplémentaires.)

- **Méthode 1.** On utilise la définition, et on prouve que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

  ▶ Si on peut, on raisonne par équivalence. Prendre $x \in E$,

  $$x \in F + G \Leftrightarrow \exists (x_F, x_G) \in F \times G \,/\, x = x_F + x_G \Leftrightarrow ...$$

  dans ce cas on obtient souvent un système dont il s'agit de prouver l'existence et l'unicité de la solution.

  ▶ Sinon, on raisonne par analyse synthèse. Prendre $x \in E$.

  → **Analyse.** Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$, tel que $x = x_F + x_G$, alors...On doit obtenir un unique couple qui convient, l'unicité est prouvée.

  → **Synthèse.** On vérifie que le couple (x_F, x_G) satisfait bien $x = x_F + x_G$.

- **Méthode 2.** On utilise la caractérisation, on montre que $F + G = E$ (méthode vue au-dessus) et $F \cap G = \{0_E\}$ (équivalence ou double-inclusion).

Exercice.

1) Retour sur les deux exemples plus hauts :

   -a- Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1)$ et $F = \text{Vect}(\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_2 = (2, -3)$.
   F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

   -b- Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 1)$ et $F = \text{Vect}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ où $\varepsilon_3 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (1, 1, 1)$.
   F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1, 0)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - y + z = 0\}$.
   Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3) Dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \widetilde{P}(1) = 0 \text{ et } \widetilde{P}(2) = 0.\}$. Montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

4) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on pose $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les ensembles des fonctions paires et impaires respectivement. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

5) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (matrices antisymétriques) sont supplémentaires.

IV Familles de vecteurs

IV.1 Famille génératrice

Pour mémoire :

Définition (Famille génératrice)

Soit $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$. La famille $\mathcal{F}=(x_1,\dots,x_n)$ est une **famille génératrice** d'un sev F de E $F=\text{Vect}(\mathcal{F})$ c'est-à-dire que F est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille.

IV.2 Famille libre

Définition (Famille libre)

Une famille $\mathcal{F}=(x_i)_{i\in I}$ est dite **libre** si :

$$\forall(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I \text{ presque nulle },\quad \left[\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0_E\Rightarrow\forall i\in I,\quad \lambda_i=0\right].$$

Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre on dit que la famille est **liée.**

☞ **Explication** ☜ $(x_i)_{i\in I}$ est liée s'il existe une combinaison linéaire nulle de $(x_i)_{i\in I}$ sans que tous les coeffcients de la combinaison linéaire ne soient tous nuls. En isolant un terme, il existe donc $i_0\in I$ tel x_{i_0} soit combinaison linéaire d'autres vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$.

$$x_{i_0}=-\frac{1}{\lambda_{i_0}}\sum_{i\in I,i\neq i_0}\lambda_i x_i,$$

c'est-à-dire x_{i_0} est combinaison linéaire des autres vecteurs.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Montrer qu'une famille finie est libre)**

Pour montrer que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre :

- prendre $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i=0_E$ *(cela mène souvent à un système)*
- puis déduire que $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $\varepsilon_1=(1,-1,1)$, $\varepsilon_2=(0,1,2)$, $\varepsilon_3=(2,0,3)$. La famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est-elle libre?
2) Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $\varepsilon_1=(2,1,0)$, $\varepsilon_2=(4,5,-2)$, $\varepsilon_3=(1,-1,1)$. La famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est-elle libre?
3) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $P_1=2X^2-X+1$, $P_2=X$, $P_3=X^2-3$. La famille (P_1,P_2,P_3) est-elle libre?
4) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on pose $f_1:x\mapsto|x-1|$, $f_1:x\mapsto|x|$, $f_1:x\mapsto|x+1|$. La famille (f_1,f_2,f_3) est-elle libre?

Propriétés

1) Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
2) Toute famille contenant une famille liée est liée.
3) Toute famille contenant un vecteur combinaison linéaire des autres vecteurs est liée.
4) Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée ou, de manière équivalente, les vecteurs d'une famille libre sont deux à deux distincts.
5) Une famille contenant le vecteur nul 0_E est liée car 0_E est combinaison linéaire des autres vecteurs avec des coefficients nuls.
6) Une famille de E contenant un seul vecteur $x \in E$ est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
7) Une famille de E contenant deux vecteurs est libre si et seulement si les vecteurs ne sont pas proportionnels. On dira dans ce cas qu'ils ne sont pas colinéaires.

Propriétés (Liberté de famille de polynômes)

1) Toute famille de polynômes **non nuls** échelonnée en degrés est libre.
2) Toute famille de polynômes **non nuls** de degrés deux à deux distincts est libre.

IV.3 Bases

Théorème-Définition (Base)

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E.

- On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une **base de** E si la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre et génératrice.
- De manière équivalente $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(e_i)_{i\in I}$.
  Les scalaires $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tels que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ sont appelés les **coordonnées de x dans la base** $(e_i)_{i\in I}$.

Remarques (Base : cas d'une famille finie.)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$.

Les coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ de x dans la base $\mathcal{B}$ telles que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ sont notées en colonnes :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$: **matrice des coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Montrer qu'une famille est une base.)**

- **Méthode 1**. On montre que la famille est libre et génératrice.
- **Méthode 2**. On montrer que tout vecteur se décompose de manière unique comme comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille. Cette méthode fournit de plus les coordonnées du vecteur.

Exercice.

1) *Retour sur l'exemple plus haut.* On pose $\varepsilon_1 = (1, -1, 1)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 2)$, $\varepsilon_3 = (2, 0, 3)$. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de $u = (2, -1, 3)$ dans cette base.
2) Dans $\mathbb{R}^3$. Détermine une base de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 3z = 0\}$.
3) Dans $\mathbb{K}_n[X]$, montrer que la famille $\left(1, X-1, \dfrac{(X-1)^2}{2!}, \ldots, \dfrac{(X-1)^n}{n!}\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.

Exemples À connaître : bases canoniques.

1) La base canonique de $\mathbb{C}$ (vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est :
2) La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est :
3) La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est :
4) La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :