Exercice 1 Soit $f : [a,+\infty[\to +\infty$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(a) = \lim\limits_{+\infty} f$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1
Méthode 1. On cherche à appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire par un changement de variable.

On pose $\alpha = \operatorname{Arctan} a$ et $g : \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right[,\ g(t) = \varphi(\tan(t)) \text{ et } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi(a).$$

Par composition, g est continue sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur $\left]\alpha, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus par composition de limites, $\lim\limits_{t\to\pi/2} g(t) = \varphi(a) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Ainsi g est continue sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]\alpha, \frac{\pi}{2}\right[$ et $g(\alpha) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D'après le théorème de Rolle il existe $t_0 \in \left]\alpha, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(t_0) = 0$.

Comme pour tout $t \in \left]\alpha, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(t) = (1+\tan^2(t))\varphi'(\tan(t))$, il vient finalement $\varphi'(\tan(t_0)) = 0$ puisque $1 + \tan^2(t_0) \neq 0$.

Ainsi $c = \tan(t_0)$ convient.

Bilan : $\boxed{\text{il existe } c \in]a,+\infty[\text{ tel que } f'(c) = 0}$.

Méthode 2. On adapte la démonstration du théorème de Rolle du cours.

- Si f est constante alors f' est nulle sur $]a,+\infty[$ et le résultat est démontré.
- Si f n'est pas constante alors posons $b \in]a,+\infty[$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Quitte à prendre $-f$ on peut supposer $f(a) < f(b)$.
  Comme $f(a) = \lim\limits_{+\infty} f < \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, par définition de la limite, il existe $u \geqslant b$ tel que : $f(u) < \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
  Puis f est continue sur le segment $[a,u]$ donc f admet admet un maximum qui n'est atteint ni en a, ni en u car $f(a) < f(b)$ et $f(u) < f(b)$ et $b \in [a,u]$. Ce maximum est donc atteint en un point critique.
- Bilan : $\boxed{\text{il existe } c \in]a,+\infty[\text{ tel que } f'(c) = 0}$.

Méthode 3. On cherche à définir un segment sur lequel appliquer le théorème de Rolle.

- Si f est constante alors f' est nulle sur $]a,+\infty[$ et le résultat est démontré.
- Si f n'est pas constante alors posons $b \in]a,+\infty[$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Quitte à prendre $-f$ on peut supposer $f(a) < f(b)$.
  On a $f(a) < \dfrac{f(a)+f(b)}{2} < f(b)$, comme f est continue sur $[a,b]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
  Puis comme $f(a) = \lim\limits_{+\infty} f < \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, par définition de la limite il existe $u \in]b,+\infty[$, tel que $f(u) < \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$. On applique le théorème des valeurs intermédiaires à f sur $[b,u]$, il existe $\beta \in [b,u]$ tel que $f(\beta) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

  On a donc f continue sur le segment $[\alpha,\beta]$ dérivable sur $]\alpha,\beta[$, $f(\alpha) = f(\beta)$. Donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]\alpha,\beta[$ tel que $f'(c) = 0$.
- Bilan : $\boxed{\text{il existe } c \in]a,+\infty[\text{ tel que } f'(c) = 0}$.

Problème

Partie I

1) f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et strictement décroissante (car $f' < 0$ sur $[a,b]$) donc réalise une bijection de $[a,b]$ vers $[f(b), f(a)]$.
Or par hypothèse $0 \in [f(b), f(a)]$ donc 0 admet un unique antécédent par f dans $[a,b]$.
Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } [a,b]}$. On note α cette solution.

2) Soit $x_0 \in [a,b]$. La tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en x_0 a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
L'abscisse x_1 du point d'intersection de T_0 et $\mathcal{C}_f$ vérifie l'équation :

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}.$$

3)

Partie II

1) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ donc f et f' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et cette dernière ne s'annule pas, donc par opérations $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a,b]}$.

$\boxed{g(\alpha) = \alpha}$ et $g'(\alpha) = 1 - \dfrac{f'(\alpha)^2 - f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}$, $\boxed{g'(\alpha) = 0}$

2) -a- Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, $|f'|$ et $|f''|$ sont continues sur le segment $[a,b]$, donc admettent respectivement un minimum et un maximum. Comme $|f'|$ ne s'annule pas alors son minimum est strictement positif.
$\boxed{\text{Il existe donc bien } m > 0 \text{ et } M > 0 \text{ tels que : } \forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \geqslant m \text{ et } |f''(x)| \leqslant M}$.

-b- f est dérivable sur $[a,b]$ et f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc $|f'|$ est bornée par un L, donc d'après l'inégalité des accroissement finis, f est L-lipschitzienne, en particulier :

$$\forall t \in [a,b],\ |f(t) - f(\alpha)| \leqslant L|t - \alpha| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\forall t \in [a,b],\ |f(t)| \leqslant L|t - \alpha|}.$$

-c- Soit $x \in [a,b]$. On désigne I l'intervalle $[x, \alpha]$ ou $[\alpha, x]$ selon les cas.
g est dérivable sur I avec : $\forall t \in I$, $g'(t) = \dfrac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2}$.
D'après II-2)-a- et 2)-b-

$$\forall t \in I, \quad |g'(t)| = \frac{|f(t)||f''(t)|}{f'(t)^2} \leqslant \frac{L|t - \alpha|M}{m^2}.$$

Comme $t \in I$, alors t est compris entre x et α et donc $|t-\alpha| \leqslant |x-\alpha|$.
Finalement :

$$\forall t \in I, \quad |g'(t)| \leqslant \underbrace{\frac{L|x-\alpha|M}{m^2}}_{\lambda}.$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, g est λ-lipschitzienne sur I, et donc en particulier

$$|g(x)-g(\alpha)| \leqslant \lambda|x-\alpha| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{|g(x)-\alpha| \leqslant \frac{LM}{m^2}|x-\alpha|^2}.$$

-d- Comme L, M et m^2 sont indépendantes de x, en posant $K = \dfrac{LM}{m^2}$, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \quad |g(x)-\alpha| \leqslant K|x-\alpha|^2}.$$

Partie III

1) -a- On a vu : $\forall x \in [a,b]$, $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$.
Or $f' < 0$, $f'' > 0$ et $f > 0$ sur $[a,\alpha]$ et $f < 0$ sur $[\alpha, b]$, donc

$$g' > 0 \text{ sur } [a,\alpha] \quad \text{et} \quad g' < 0 \text{ sur } [\alpha,b].$$

Donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [a,\alpha] \text{ et strictement décroissante sur } [\alpha,b]}$.

-b- Comme $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ et $f' < 0$ alors $g(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} > a$ et $g(b) = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)} < b$.
Alors $g([a,\alpha] \subset [a,\alpha])$ donc $[a,\alpha]$ est stable par g. Comme $x_0 = a \in [a,\alpha]$ alors la suite (x_n) est bien définie et à valeurs dans $[a,\alpha]$, donc majorée par α.
Comme g est croissante sur $[a,\alpha]$ alors (x_n) est monotone. Et $x_1 = g(a) > a = x_0$ donc $\boxed{(x_n) \text{ est croissante et majorée par } \alpha}$.

-c- Il en découle que (x_n) converge, d'après le théorème de la limite monotone, vers un point fixe de g.
Or $g(x) = x$ si et seulement si $\dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0$ c'est-à-dire $f(x) = 0$ c'est à dire $x = \alpha$.
Donc $\boxed{(x_n) \text{ converge vers } \alpha}$.

2) -a- Posons h un réel tel que $h < \dfrac{1}{K}$ et $[\alpha-h, \alpha+h] \subset [a,b]$ (possible car $a < \alpha < b$ en prenant $h < \min(\alpha-a, b-\alpha)$.

-b- D'après II-2)-d-, comme $I \subset [a,b]$

$$\forall x \in I, \quad |g(x)-\alpha| \leqslant K|x-\alpha|^2.$$

Comme $x \in [\alpha-h,\alpha+h]$, alors $|x-\alpha| \leqslant h$, et donc comme $Kh < 1$ il vient :

$$\forall x \in I, \quad |g(x)-\alpha| \leqslant h \quad \text{c'est-à-dire} \quad g(x) \in [\alpha-h,\alpha+h] = I.$$

Donc $\boxed{I \text{ est stable par } g}$.
On pose $x_0 \in I$ donc (x_n) est définie et à valeurs dans I.

-c- En utilisant II-2)-d- avec $x = x_n$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |g(x_n)-\alpha| \leqslant K|x_n-\alpha|^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad K|x_{n+1}-\alpha| \leqslant (K|x_n-\alpha|)^2.$$

Par récurrence [...], on montre alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad K|x_n-\alpha| \leqslant (K|x_0-\alpha|)^{2^n} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{K}(K|x_0-\alpha|)^{2^n}}.$$

-d- Comme $x_0 \in I$ alors $|x_0 - \alpha| \leqslant h$ et donc $|K|x_0 - \alpha|| < 1$ donc $|K|x_0 - \alpha||^n \to 0$.
Par théorème des gendarmes, il vient : $\boxed{x_n \to \alpha}$.

3) -a- On a pour $x \in [1, 3]$, $f(x) = 3 - x^2$, $f'(x) = -2x$ et $f''(x) = -2$ donc $2 \leqslant |f'(x)| \leqslant 6$ et $|f''(x)| = 2$.
Donc $m = 2$, $L = 6$ et $M = 2$ conviennent d'après II-2)-a- et -b-, et donc $K = \dfrac{LM}{m^2} = 3$.
Avec $h = 0.3$ on a bien $Kh < 1$ et $I = [\sqrt{3} - 0.3, \sqrt{3} + 0.3] \subset [1, 3]$.

-b- Avec $x_0 = 2$ on a bien $x_0 \in I$ donc d'après III-2)-b- (x_n) est bien définie.

-c- D'après III-2)-c-, avec $K = 3$, $|x_0 - \alpha| \leqslant h = 0.3$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \sqrt{3}| \leqslant \frac{1}{3}(0.9)^{2^n}}.$$

-d- Pour obtenir une approximation de $\sqrt{3}$ à 100 décimales, il suffit d'avoir

$$\begin{aligned}
& & \frac{1}{3}(0.9)^{2^n} \leqslant 10^{-100} \\
&\text{c'est-à-dire} & 2^n \ln(0.9) \leqslant \ln(3 \times 10^{-100}) \\
&\text{c'est-à-dire} & 2^n \geqslant \frac{\ln(3 \times 10^{-100})}{\ln(0.9)} \qquad (\ln(0.9) < 0) \\
&\text{c'est-à-dire} & n \geqslant \frac{\ln\left(\dfrac{\ln(3 \times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right)}{\ln 2}
\end{aligned}$$