**Exercice 1**. Echauffement
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 + 1$.

**Exercice 2** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$.

1) -a- Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

-b- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n$ à coefficients réels tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{e}^x\, \widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\qquad P_{n+1} = (1-X)P_n' + (n+2-X)P_n$.

-c- Donner les expressions de $P_0$, $P_1$ et $P_2$.

-d- Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de $P_n$ et son coefficient dominant.

-e- Après avoir exprimé $\widetilde{P_{n+1}}(1)$ en fonction de $\widetilde{P_n}(1)$, calculer $\widetilde{P_n}(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) -a- Vérifier que pour tout $x \neq -1$, on a:

$$(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0 \quad (*)$$

-b- En dérivant $n$ fois $(*)$ et en appliquant la formule de Leibniz, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{n+1} = (n+2-X)P_n + n(X-1)P_{n-1}.$$

-c- Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n' = -nP_{n-1}$.

3) -a- Soit $n$ et $k$ entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. À l'aide de 2)-c-, trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ et $P_{n-k}$.
En déduire l'égalité : $\widetilde{P_n}^{(k)}(1) = (-1)^k n!$.

-b- À l'aide de la formule de Taylor, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$P_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-X)^k}{k!}.$$

4) Déterminer un équivalent simple de $\widetilde{P_n}(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ (à $n$ fixé).

5) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\, \widetilde{Q_n}(x).$$

-a- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre $Q_n'$ et $Q_{n-1}$.
En déduire une expression de $g_n'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

-b- Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $a$,

$$|g_n(a) - g_n(0)| \leqslant \frac{|a|^{n+1}}{n!} \max(1, \mathrm{e}^{-a}).$$

-c- En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \widetilde{Q_n}(a)$.

6) Déterminer un équivalent simple de $\widetilde{P_n}(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ (à $x$ fixé).