Quelques remarques

- N'abusez pas de la locution : "par récurrence immédiate". En particulier la récurrence ne peut être qualifié d'immédiate pour la question 1)-d- qui demande de déterminer coefficient dominant et degré.

- Ne confondez pas fonction et fonction polynomiale.
  Lorsque vous justifiez une égalité de polynômes à partie d'une égalité de fonctions polynomiales, il faut le JUSTIFIER.
  D'autant plus que les égalités polynomiales ont lieu le plus souvent dans cet exercice sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
  C'est le cas dans 1)-a- lorsque qu'il s'agit de prouver l'unicité; c'est le cas dans 2)-b-.

1)-a- Il ne faut pas mettre la relation $P_{n+1} = (1-X)P_n' + (n+2-X)P_n$ dans $\mathcal{P}(n)$, sans quoi dans l'hérédité il faut prouver $P_{n+2} = (1-X)P_{n+1}' + (n+3-X)P_{n+1}$ (propriété au rang $n+1$).

2)-c- Justifier correctement la simplification par $1-X$, en évoquant l'intégrité de $\mathbb{R}[X]$ et $1-X \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ (différent du polynôme nul). La justification $X \neq 1$ n'a bien sur aucun sens.

4) Une fonction polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré. Pour déterminer un équivalent de $\widetilde{P_n}(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$ on peut aller plus vite que ce que vous avez tous fait (plus ou moins bien d'ailleurs) en utilisant le degré n et le coefficient dominant $(-1)^n$ de P_n trouvé en 1)-d- : $\widetilde{P_n}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (-1)^n x^n$.

Exercice 1

1) -a- $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}\setminus\{1\}}$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

-b- Posons pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété:

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}\boxed{\text{il existe } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que}} : \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}}\text{”}.$$

- **Initialisation**. Pour $n = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $P_0 = 1$ qui convient.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, il existe alors $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que:
  $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\,\widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}}$. On dérive cette relation pour obtenir, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x\,\widetilde{P_n}(x) + \mathrm{e}^x\,\widetilde{P_n}'(x))(1-x)^{n+1} - \mathrm{e}^x\,\widetilde{P_n}(x) \times (-1)(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x((1-x)\widetilde{P_n}'(x) + (n+2-x)\widetilde{P_n}(x))}{(1-x)^{n+2}} \\ &= \frac{\widetilde{P_{n+1}}(x)}{(1-x)^{n+2}} \quad \text{où on a posé} \quad \boxed{P_{n+1} = (1-X)P_n' + (n+2-X)P_n}. \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que: } \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{\widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}}}$.
  L'existence est donc prouvée, reste à prouver l'unicité.
  Soient P_n et Q_n deux polynômes qui conviennent,

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{\widetilde{Q_n}(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

  Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\widetilde{P_n}(x) = \widetilde{Q_n}(x)$. L'égalité étant vraie pour une infinité de x alors $P_n = Q_n$ (le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines).
  $\boxed{\text{L'unicité de } P_n \text{ est donc prouvée}}$.

-c- $\boxed{P_0 = 1}$ et avec la relation de récurrence trouvée en 1)-a-, $P_1 = (1-X)P_0' + (2-X)P_0$ donc $\boxed{P_1 = 2 - X}$.

Puis $P_2 = (1-X)P_1' + (3-X)P_1 = (X-1) + (3-X)(2-X)$ donc $\boxed{P_2 = X^2 - 4X + 5}$.

-d- Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\deg P_n = n$ et $\mathrm{CD}(P_n) = (-1)^n$ ".

- **Initialisation**. $P_1 = 2 - X$ donc $\deg(P_1) = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. D'après 1)-b-, $P_{n+1} = (1-X)P_n' + (n+2-X)P_n$. Or:
  - * $\deg((1-X)P_n') = 1 + \deg(P_n') = 1 + n - 1 = n$ d'après l'hypothèse de récurrence. (C'est là que l'on utilise $n \geqslant 1$, pour écrire que $\deg(P_n') = n - 1$).
  - * $\deg((n+2-X)P_n) = 1 + \deg(P_n) = n + 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.

  Finalement, $\deg(P_{n+1}) = n + 1$.
  Puis $\mathrm{CD}(P_{n+1} = \mathrm{CD}((n+2-X)P_n) = -\mathrm{CD}(P_n) = (-1)^{n+1}$.
- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ est de degré } n \text{ et } \mathrm{CD}(P_n) = (-1)^n}$.

Notons enfin que $P_0 = 1$ donc les résultats sont vrais pour $n \in \mathbb{N}$.

-e- Soit $n \in \mathbb{N}$. On évalue la relation de récurrence de 1)-b- en , on obient $\widetilde{P_{n+1}}(1) = (n+1)\widetilde{P_n}(1)$.
On itère cette relation de récurrence:

$$\widetilde{P_{n+1}}(1) = (n+1)\widetilde{P_n}(1) = (n+1)n(n-1)\widetilde{P_{n-1}}(1) = \cdots = (n+1)n(n-1)\cdots 1\widetilde{P_1}(1) = (n+1)!.$$

On montre donc par récurrence immédiate que: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \widetilde{P_n}(1) = n!}$.

2) -a- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + \mathrm{e}^x}{(1-x)^2}$. Donc:

$$(1-x)f'(x) = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x}{1-x} = \frac{(2-x)\,\mathrm{e}^x}{1-x}.$$

D'où, $\boxed{(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0 \quad (*)}$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u(x) = x - 1$ et $v(x) = x - 2$. La relation $(*)$ se réécrit,

$$u(x)f'(x) - v(x)f(x) = 0.$$

D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}(u \times f')^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)(f')^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{0} u^{(0)}(x)(f')^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u^{(1)}(x)(f')^{(n-1)}(x) \qquad \text{(les autres termes de la somme sont nuls)} \\ &= (x-1)f^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x).\end{aligned}$$

De même:

$$(v \times f)^{(n)}(x) = (x-2)f^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x).$$

En réinjectant dans $(*)$,

$$(x-1)f^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x) - (x-2)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x) = 0.$$

Et donc en remplaçant les dérivées de f par l'expression de 1)-b-,

$$(x-1)\frac{\mathrm{e}^x\,\widetilde{P_{n+1}}(x)}{(1-x)^{n+2}} = (x-2-n)\frac{\mathrm{e}^x\,\widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}} + n\frac{\mathrm{e}^x\,\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1-x)^n}.$$

En multipliant par $-(1-x)^{n+1}$ et en simplifiant par e^x,

$$\widetilde{P_{n+1}}(x) = (n+2-x)\widetilde{P_n}(x) + n(x-1)\widetilde{P_{n-1}}(x).$$

La relation étant vraie pour tout $x \neq -1$ (soit une infinité de x), il vient

$$\boxed{P_{n+1} = (n+2-X)P_n + n(X-1)P_{n-1}}.$$

(le polynôme $P_{n+1} - ((n+2-X)P_n + n(X-1)P_{n-1})$ admet une infinité de racines)

-c- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on identifie les deux expressions de P_{n+1} trouvées en 1)-b- et 2)-b-, pour trouver

$$(1-X)P_n' + (n+2-X)P_n = (n+2-X)P_n + n(X-1)P_{n-1}$$

d'où : $(1-X)P_n' = -n(1-X)P_{n-1}$. Comme $1-X$ est non nul, l'intégrité de $\mathbb{R}[X]$ permet de simplifier $\boxed{P_n' = -nP_{n-1}}$.

3) -a- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, d'après la formule de Taylor,en posant $m = \deg P$

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{m} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k}.$$

-b- Soient n et k deux entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$. On itère la relation trouvée en 2)-c-,

$$\begin{aligned}
P_n^{(k)} &= (P_n')^{(k-1)} = (-nP_{n-1})^{(k-1)} \\
&= (-n)(-(n-1))P_{n-2}^{(k-2)} \\
&= (-n)(-(n-1))(-(n-2))P_{n-3}^{(k-3)} \\
&= \cdots \\
&= (-1)^k n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)P_{n-k}^{(0)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_n^{(k)} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} P_{n-k}}.$$

Relation que l'on démontre par récurrence immédiate.
En évaluant en 1, la relation précédente et en utilisant 1)-e-, il vient:

$$\widetilde{P_n}^{(k)}(1) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} P_{n-k}(1) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)! \quad \text{donc} \quad \boxed{\widetilde{P_n}^{(k)}(1) = (-1)^k n!}.$$

-c- À l'aide de 3)-a- et 3)-b-, il vient

$$\begin{aligned}
P_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P_n}^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!(-1)^k}{k!}(X-1)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-X)^k}{k!}}.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\deg(P_n) = n$ avec le coefficient dominant valant $(-1)^n$ alors au voisinage de $+\infty$, $\boxed{\widetilde{P_n}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} (-1)^n x^n}$.

5) -a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{X^j}{j!} \quad \text{en posant } j = k-1$$
$$\boxed{Q_n' = Q_{n-1}}.$$

g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec:

$$g_n'(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\widetilde{Q_n}(x) + \widetilde{Q_n'}(x))$$
$$= \mathrm{e}^{-x}(-\widetilde{Q_n}(x) + \widetilde{Q_{n-1}}(x))$$
$$\boxed{g_n'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}\,\frac{x^n}{n!}}$$

-b- Soit $a \in \mathbb{R}$. g_n est dérivable sur $[0, a]$ (si $a > 0$) ou $[a, 0]$ (si $a < 0$) avec pour tout $t \in [0, a]$ (ou $[a, 0]$),

$$|g_n'(t)| = |\,\mathrm{e}^{-t}\,|\frac{|t|^n}{n!} \leqslant \max(1, \mathrm{e}^{-a})\frac{|a|^{n+1}}{n!}.$$

On a utilisé que :

- pour $a > 0$ alors $\mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$ car $t \in [0, a]$ donc $t \geqslant 0$
- pour $a < 0$ alors $\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-a}$ car $t \in [a, 0]$ donc $t \geqslant a$ donc $-t \leqslant -a$.

Donc d'après le théorème des accroissements finis, la fonction g_n est K-lipschitzienne sur $[0, a]$ ou $[a, 0]$ avec $K = \max(1, \mathrm{e}^{-a})\dfrac{|a|^{n+1}}{n!}$. Donc, en particulier :

$$\boxed{|g_n(a) - g_n(0)| \leqslant \frac{a^n}{n!}\max(1, \mathrm{e}^{-a})|a - 0| = \frac{a^{n+1}}{n!}\max(1, \mathrm{e}^{-a}).}$$

-c- Par croissance comparées, $\dfrac{a^{n+1}}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après 5)-b- et par théorème d'encadrement $g_n(a) - g_n(0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or $g_n(0) = 1$ et $g_n(a) = \mathrm{e}^{-a}\,\widetilde{Q_n}(a)$ donc $\mathrm{e}^{-a}\,\widetilde{Q_n}(a) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ c'est-à-dire $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \widetilde{Q_n}(a) = \mathrm{e}^a}$.

6) Notons que pour $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P_n}(x) = n!\widetilde{Q_n}(1-x)$. Or d'après 5)-c-, $\widetilde{Q_n}(1-x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{1-x}$ d'où $\boxed{\widetilde{P_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n!\,\mathrm{e}^{1-x}}$.