La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice 1. Calculs

1) Déterminer un équivalent de $f(x) = \dfrac{\sin^3 x - \tan^3 x}{x^4}$ en 0.

2) Déterminer un équivalent de $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+1}\right)$ en 0.

3) Déterminer la limite de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}} - x$ en $+\infty$.

4) Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan(\frac{\pi x}{4})}$ en 1.

Exercice 2 On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$.

2) -a- Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2}$.
Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique puis donner l'expression de α_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

-b- En déduire que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) -a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$.
On fera une récurrence double sur l'entier p.

-b- En déduire : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $F_{n+p} \wedge F_n = F_n \wedge F_p$.

-c- Prouver alors : $\forall (n,k,p) \in \mathbb{N}^3$, $F_{kn+p} \wedge F_n = F_n \wedge F_p$.

4) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m}.$$

5) Applications.

-a- Vérifier que F_8 est le premier terme divisible par 7.
Justifier l'équivalence : $7|F_n \Leftrightarrow 7|F_{n\wedge 8}$.
En déduire que 7 divise F_n si et seulement si n est un multiple de 8.

-b- De même, déterminer tous les termes F_n divisibles par 4, puis tous les termes F_n divisibles par 28.

Exercice 3

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{x + y\sqrt{2} \,/\, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

Cet exercice est constitué de trois parties. La partie III, plus difficile, n'est à traiter qu'en fin d'épreuve. Elle ne sera lue que si l'ensemble du devoir a été raisonnablement traité.

I. Structure de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

1) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, muni de l'addition et de la multiplication des réels, est un anneau commutatif et intègre.

On se propose de déterminer le groupe U des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

II. Un critère d'inversibilité dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

Pour tout $z = x + y\sqrt{2}$, $\quad (x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $\bar{z} = x - y\sqrt{2}$ $\quad$ et $\quad N(z) = z\bar{z}$.

2) Montrer que $\varphi : \; z \mapsto \bar{z}$ est un isomorphisme d'anneau de $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ dans lui-même.
Déterminer φ^{-1}, bijection réciproque de φ.

3) Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \quad N(z_1 \times z_2) = N(z_1) \times N(z_2)$.

4) Montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(z)$ l'est dans $\mathbb{Z}$.
En déduire que pour tout $z = x + y\sqrt{2}$ avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$z \in U \Leftrightarrow \left|x^2 - 2y^2\right| = 1.$$

III. Forme des éléments de U

On note U_+ les éléments de U de la forme $z = x + y\sqrt{2}$ avec $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$.

5) On pose $u = 1 + \sqrt{2}$. Montrer que $u \in U_+$.

6) Soit $z \in U_+$. Montrer que, si $z \neq u$, alors $y < x < 2y$.

7) Montrer que, si $z \in U_+$ et $z \neq u$, alors $z' = \dfrac{z}{u}$ est élément de U_+.

8) On veut montrer que si $z \in U_+$ alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z = u^n$.
Soit $z \in U_+$. On définit la suite (z_k) par $z_0 = z$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_{k+1} = \dfrac{z_k}{u}$.
Par l'absurde on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $z_k \neq u$.
   -a- Montrer que (z_k) est une suite d'éléments de U_+.
   -b- En considérant la limite de la suite (z_k), obtenir une contradiction. Que peut-on en conclure?

9) Déterminer U_+.

10) Déterminer alors la forme de tous les éléments de U.

Problème 1

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient:

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \\ f \text{ s'annule au moins une fois sur } \mathbb{R}, \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y). \end{cases}$$

Le but du problème est de déterminer les éléments de $\mathcal{E}$.

1) -a- Montrer que la fonction nulle est dans $\mathcal{E}$.

-b- Montrer que la fonction cosinus est dans $\mathcal{E}$.

-c- Si f est dans $\mathcal{E}$ et si $\omega \in \mathbb{R}^*$, montrer que la fonction $f_\omega : x \mapsto f(\omega x)$ est dans $\mathcal{E}$.

2) On considère une fonction $f \in \mathcal{E}$. En donnant x et à y des valeurs particulières, prouver que :

-a- $f(0)$ vaut 0 ou 1.

-b- Si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle.

-c- Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

-d- Si $f(0) = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2 - 1$.

-e- Si f s'annule en $a \in \mathbb{R}^*$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2a-x) = -f(x)$. En déduire que f est $4a-$périodique.

Dans la suite, f est un élément de $\mathcal{E}$ avec $f(0) = 1$.

3) -a- Montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

-b- Soit $A = \{x > 0 | f(x) = 0\}$, montrer que A admet une borne inférieure.

On pose dans la suite du problème, $a = \inf(A)$.

-c- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in A$ tel que $a \leqslant t_n < a + \dfrac{1}{n}$. Prouver alors que $f(a) = 0$. En déduire que $a > 0$.

-d- Montrer que $\forall x \in [0, a[,\ f(x) > 0$.

Dans la suite, on pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(\omega x)$ avec $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$.

4) -a- Soit $q \in \mathbb{N}$, montrer que $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) = 2\left[f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2 - 1$. En déduire que $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$.

-b- Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$ (récurrence sur p).

-c- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que la suite u définie par $u_q = \dfrac{a\left\lfloor 2^q \frac{x}{a} \right\rfloor}{2^q}$ converge vers x et que $f(u_q) = g(u_q)$.

-d- En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$.

5) Déterminer $\mathcal{E}$.