Exercice 1

1) Pour x au voisinage de 0,
$$\sin^3 x - \tan^3 x = \sin^3 - \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin^3 x(\cos^3 x - 1)}{\cos^3 x}.$$
Or $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $\sin^3 x \underset{0}{\sim} x^3$.
Puis, $\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\cos x \underset{0}{\sim} 1$ donc $\cos^3 x \underset{0}{\sim} 1$.
Enfin, $\cos^3 x - 1 = (\cos x - 1)(\cos^2 + \cos x + 1)$ avec $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et $\cos^2 + \cos x + 1 \underset{0}{\sim} 3$ (car a pour limite 3).
Finalement,
$$\sin^3 x - \tan^3 x \underset{0}{\sim} \frac{x^3 \times (-\frac{x^2}{2}) \times 3}{1} = -\frac{3}{2}x^5. \qquad \text{Et donc, } \boxed{\frac{\sin^3 - \tan^3 x}{x^4} \underset{0}{\sim} -\frac{3x}{2}.}$$

2) Comme $\frac{\pi}{x^2+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pi$ et que l'on souhaite se ramener à un équivalent de tan en 0, on exploite la π-périodicité de tan. Pour x au voisinage de 0,
$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x^2+1} - \pi\right) = \tan\left(\frac{-\pi x^2}{x^2+1}\right) \underset{0}{\sim} \frac{-\pi x^2}{x^2+1} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \frac{-\pi x^2}{x^2+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \tan u \underset{0}{\sim} u \end{cases}.$$
Enfin, $x^2 + 1 \underset{0}{\sim} 1$, donc $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) \underset{0}{\sim} -\pi x^2}$.

3) Sur un voisinage de $+\infty$,
$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\right) \quad \text{car} \quad x > 0 \\ &= x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} - 1\right) \end{aligned}$$
Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{-1}{2(x+1)}$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2}$ c'est-à-dire $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-1}{2}.}$

4) On a bien une FI. On pose $h = x - 1$, $f(1+h) = \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt[3]{8+3h}}{1 - \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}h)}$.
$$\begin{aligned} \sqrt{4+h} - \sqrt[3]{8+3h} &= 2\left(\sqrt{1+\frac{h}{4}} - \sqrt[3]{1+\frac{3h}{8}}\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} 2\left(1 + \frac{h}{2\times 4} + \circ(h) - (1 + \frac{3h}{3\times 8} + \circ(h))\right) \underset{h\to 0}{=} \circ(h) \end{aligned}$$
$$1 - \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}h) = 1 - \frac{1 + \tan(\frac{\pi}{4}h)}{1 - \tan(\frac{\pi}{4}h)} = \frac{-2\tan(\frac{\pi}{4}h)}{1 - \tan(\frac{\pi}{4}h)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-2\frac{\pi}{4}h}{1} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-\pi h}{2}$$
On peut conclure $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = 0.}$

Exercice 2 On considère la suite de Fibonacci définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1) On montre la propriété par récurrence double. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$F_n \in \mathbb{N}$".
   - $F_0 = 0 \in \mathbb{N}$ et $F_1 = 1 \in \mathbb{N}$ donc la propriété est initialisée.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $F_n \in \mathbb{N}$ et $F_{n+1} \in \mathbb{N}$ sont vraies. Comme $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ alors $F_{n+2} \in \mathbb{N}$.
   - En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}}$.

2) -a- Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} \\ &= F_{n+2}(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) \quad \text{(relation de récurrence)} \\ &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = -\alpha_n. \end{aligned}$$
Donc (α_n) est une suite géométrique, de raison -1 de premier terme $\alpha_0 = F_1^2 - F_0F_2 = -1$, donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = (-1)^n \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n}.$$

-b- D'après 2)-a-, pour $n \in \mathbb{N}$, F_n et F_{n+1} vérifient une relation de Bezout, en distinguant n pair et n impair :
$$\text{si } n \text{ pair,} \quad F_{n+1}F_{n+1} + F_n(-F_{n+2}) = 1 \qquad \text{si } n \text{ impair,} \quad F_{n+1}(-F_{n+1}) + F_nF_{n+2} = 1.$$
Donc d'après le théorème de Bezout, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_n \text{ et } F_{n+1} \text{ sont premiers entre eux}}$.

3) -a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On montrer le résultat par récurrence double. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(p)$: "$F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$".

- **Initialisation**. Pour $p = 0$, $F_{n+0} = F_n$ et $F_{n-1}F_0 + F_nF_{0+1} = F_n$ car $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Pour $p = 1$, $F_{n+1} = F_{n+1}$ et $F_{n-1}F_1 + F_nF_2 = F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité**. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$ et $\mathcal{P}(p+1)$ sont vraies. Au rang $p+2$,

$$\begin{aligned} F_{n+p+2} &= F_{n+p+1} + F_{n+p} = (F_{n-1}F_{p+1} + F_nF_{p+2}) + (F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}) \text{ (par hypothèse de récurrence).} \\ &= F_{n-1}(F_{p+1} + F_p) + F_n(F_{p+2} + F_{p+1}) \\ &= F_{n-1}F_{p+2} + F_nF_{p+3}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(p+2)$ est vraie.

- **Conclusion**. $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}}$.

Autre méthode (qui ne tient pas compte de l'indication de faire une récurrence) : on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$, $\beta_{n,p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \beta_{n+1,p} &= F_nF_p + F_{n+1}F_{p+1} = F_nF_p + (F_n + F_{n-1})F_{p+1} \qquad \text{(relation de récurrence de Fibonacci)} \\ &= F_nF_p + F_nF_{p+1} + F_{n-1}F_{p+1} = F_n(F_p + F_{p+1}) + F_{n-1}F_{p+1} \\ &= F_nF_{p+2} + F_{n-1}F_{p+1} \qquad \text{(relation de récurrence de Fibonacci)} \\ &= F_{n-1}F_{p+1} + F_nF_{p+2} \\ &= \beta_{n,p+1} \end{aligned}$$

On peut donc itérer cette relation de récurrence,

$$\beta_{n,p} = \beta_{n-1,p+1} = \beta_{n-2,p+2} = \cdots = \beta_{1,p+n-1} = F_0F_{p+n-1} + F_1F_{p+n} = F_{p+n}.$$

(que l'on démontrerait aisément par récurrence).

-b- Si $n = 0$ le résultat est évident.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on montre que LES diviseurs de F_{n+p} et F_n sont LES diviseurs de F_n et F_p.
Soit d un diviseur de F_n et F_p. D'abord, d divise bien F_p puis d'après 3)-a-, $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$ donc par opérations d divise F_{n+p}.
Soit d un diviseur de F_{n+p} et F_n. D'abord, d divise bien F_n, puis d'après 3)-a-, $F_{n-1}F_p = F_{n+p} - F_nF_{p+1}$ donc par opérations d divise $F_{n-1}F_p$. Or d divise F_n, de plus F_n et F_{n-1} sont premiers entre eux donc d et F_{n-1} sont premiers entre eux. Donc d'après le théorème de Gauss (rappelons que d divise $F_{n-1}F_p$) alors d divise F_p.
On a donc en conclusion : $\boxed{F_{n+p} \wedge F_n = F_n \wedge F_p}$.

-c- L'expression à trouver pour $F_{kn+p} \wedge F_n$ est constante par rapport à k, ce qui suggère de poser une suite que l'on va prouver être constante par rapport à k. (On pourrait aussi démontrer le résultat par récurrence sur k).
Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$. On pose pour $k \in \mathbb{N}$, $\beta_k = F_{kn+p} \wedge F_n$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\beta_{k+1} = F_{(k+1)n+p} \wedge F_n = F_{kn+n+p} \wedge F_n = F_n \wedge F_{kn+p} \text{ d'après 3)-b- avec } kn+p \text{ au lieu de } p.$$

On a donc prouvé $\beta_{k+1} = F_{kn+p} \wedge F_n = \beta_k$. Donc γ est constante, or $\gamma_0 = F_n \wedge F_p$.
On a donc bien, $\boxed{\text{pour tout } (n,k,p) \in \mathbb{N}^3,\ F_{kn+p} \wedge F_n = F_n \wedge F_p}$.

4) On applique l'algorithme d'Euclide du calcul du PGCD de n et m. On pose $r_0 = n$ et $r_1 = m$, puis q et r_2 les quotient et reste respectifs de la division euclidienne de r_0 par r_1,

$$F_n \wedge F_m = F_{r_0} \wedge F_{r_1} = F_{qr_1+r_2} \wedge F_{r_1} = F_{r_1} \wedge F_{r_2} \qquad \text{d'après 3)-c- avec } k = q_1,\ n = r_1,\ p = r_2.$$

On itère ce procédé, et on note r_{N+1} le premier reste nul, alors $r_N = n \wedge m$, et en appliquant 3)-c-,

$$F_n \wedge F_m = F_N \wedge 0 = F_N \qquad \text{donc} \qquad \boxed{F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}}.$$

5) Applications.

-a- On calcule les premiers termes de la suite de Fibonacci : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$ $\boxed{\text{le premier terme divisible par 7 est donc } F_8}$.

Pour la première équivalence :

$$\begin{aligned} 7|F_n &\Leftrightarrow 7|F_n \text{ et } 7|F_8 \qquad \text{(car } 7|F_8) \\ &\Leftrightarrow 7|F_n \wedge F_8 \qquad \text{(caractérisation des diviseurs communs de } F_n \text{ et } F_8) \end{aligned}$$

$$\boxed{7|F_n \Leftrightarrow 7|F_{n\wedge 8} \qquad \text{d'après (4))}}.$$

Pour la seconde équivalence, notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \wedge 8$ étant un diviseur de 8 alors $n \wedge 8 \in \{0, 1, 4, 8\}$, or le premier F_k divisible par 7 est F_8, donc

$$7|F_{n\wedge 8} \Leftrightarrow n \wedge 8 = 8 \Leftrightarrow 8|n.$$

En combinant avec la première équivalence, il découle

$$\boxed{7|F_n \Leftrightarrow 8|n}.$$

-b- Le premier terme divisible par 4 est F_6. On montrerait de même, $\boxed{4|F_n \Leftrightarrow 6|n}$.

Puis,

$$\begin{aligned}
28|F_n &\Leftrightarrow 4|F_n \text{ et } 7|F_n \quad \text{car } 4\wedge 7 = 1\\
&\Leftrightarrow 6|n \text{ et } 8|n \quad \text{d'après 5)-a- et ce qui précède}\\
&\Leftrightarrow 6\vee 8|n
\end{aligned}$$

$$\boxed{28|F_n \Leftrightarrow 24|n}.$$

Exercice 3 On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{x + y\sqrt{2}/(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.

I. Structure de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

1. Commençons par appliquer la caractérisation des sous-anneaux :
   - De façon évidente, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$.
   - Puisque $0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, alors $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \neq \emptyset$.
   - Soient u et v appartenant à $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
     Il existe alors (x,y,z,t) appartenant à $\mathbb{Z}^4$ tel que $u = x + y\sqrt{2}$ et $v = z + t\sqrt{2}$ et :
     - $$u - v = x + y\sqrt{2} - (z + t\sqrt{2}) = \underbrace{(x-z)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(y-t)}_{\in\mathbb{Z}}\sqrt{2},$$
       autrement dit $u - v \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;
     - $$u\times v = (x + y\sqrt{2})\times(z + t\sqrt{2}) = \underbrace{(xz + 2ty)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(tx + yz)}_{\in\mathbb{Z}}\sqrt{2},$$
       autrement dit $u \times v \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
   - Enfin $1 = 1 + 0\sqrt{2}$, donc $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

   Nous en déduisons que $\boxed{\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{R}}$.

   De plus l'anneau $\mathbb{R}$ est commutatif et intègre donc $\boxed{\text{l'anneau } \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \text{ est commutatif et intègre.}}$

II. Un critère d'inversibilité dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

2. Commençons par remarquer qu'il est évident que φ est une application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même.
   - Soit z appartenant à $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Il existe alors (x,y) appartenant à $\mathbb{Z}^2$ tel que $z = x + y\sqrt{2}$ et :
     $$(\varphi\circ\varphi)(z) = \varphi(\varphi(z)) = \varphi(x - y\sqrt{2}) = x - (-y)\sqrt{2} = x + y\sqrt{2} = z.$$
     Ainsi $\varphi\circ\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}$ et donc φ est une bijection de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même et $\varphi^{-1} = \varphi$.
     Soit (z_1, z_2) appartenant à $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^2$. Il existe (x,y,z,t) appartenant à $\mathbb{Z}^4$ tel que $z_1 = x + y\sqrt{2}$ et $z_2 = z + t\sqrt{2}$. Alors :
   - $$\begin{aligned}
\varphi(z_1 + z_2) &= \overline{z_1 + z_2}\\
&= \overline{(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2})}\\
&= \overline{(x + z) + (y + t)\sqrt{2}}\\
&= (x + z) - (y + t)\sqrt{2}\\
&= x - y\sqrt{2} + z - t\sqrt{2}\\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2}\\
&= \varphi(z_1) + \varphi(z_2).
\end{aligned}$$
     Ainsi $\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$.
   - $$\begin{aligned}
\varphi(z_1 z_2) &= \overline{z_1 z_2}\\
&= \overline{(x + y\sqrt{2})(z + t\sqrt{2})}\\
&= \overline{(xz + 2ty) + (yz + xt)\sqrt{2}}\\
&= (xz + 2ty) - (yz + xt)\sqrt{2},
\end{aligned}$$

tandis que :

$$\begin{array}{rcl}\varphi(z_1)\varphi(z_2) & = & \overline{z_1}\times\overline{z_2}\\ & = & \overline{(x+y\sqrt{2})}\,\overline{(z+t\sqrt{2})}\\ & = & (x-y\sqrt{2})(z-t\sqrt{2})\\ & = & (xz+2ty)-(yz+xt)\sqrt{2}.\end{array}$$

Ainsi $\varphi(z_1z_2)=\varphi(z_1)\times\varphi(z_2)$.

- Enfin, $\varphi(1)=\overline{1+0\sqrt{2}}=1-0\sqrt{2}=1$.

Ainsi $\boxed{\varphi : z\longmapsto \bar{z} \text{ est un isomorphisme d'anneau de } (\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times) \text{ dans lui-même}}$, *i.e.* un automorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. De plus $\boxed{\varphi^{-1}=\varphi}$.

3. Soient z_1 et z_2 appartenant à $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll}N(z_1\times z_2) & = & (z_1z_2)\times\overline{(z_1z_2)} & \\ & = & (z_1z_2)\times(\overline{z_1}\times\overline{z_2}) & \text{(car } \varphi \text{ est un morphisme d'anneaux)}\\ & = & (z_1\overline{z_1})\times(z_2\overline{z_2}) & \text{(car la multiplication dans } \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \text{ est commutative et associative)}\\ & = & N(z_1)\times N(z_2) & \end{array}$$

Ainsi $\boxed{\forall\ (z_1,z_2)\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^2,\quad N(z_1\times z_2)=N(z_1)\times N(z_2)}$.

4. Soient z appartenant à $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
Rappelons que $\mathbb{Z}^\times=\{-1,1\}$ et raisonnons par double implication :

- Si $N(z)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$, alors $z\overline{z}=1$ ou $z\overline{z}=-1$, et donc $z\overline{z}=1$ ou $z(-\overline{z})=1$.
Dans les deux cas z est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, puisque $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est stable par passage au conjugué et à l'opposé.
- Réciproquement, supposons z inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. il existe alors z' appartenant à $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $zz'=1$.
En composant par N de chaque côté, nous obtenons $N(zz')=N(1)=1$, puis d'après la question précédente, $N(z)\times N(z')=1$, ce qui entraîne que $N(z)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$.

Ainsi $\boxed{z \text{ est inversible dans } \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \text{ si, et seulement si, } N(z) \text{ l'est dans } \mathbb{Z}}$.
Soit (x,y) appartenant à $\mathbb{Z}^2$ tel que $z=x+y\sqrt{2}$, alors : $N(z)=(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})=x^2-2y^2$.
Ainsi $N(z)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$ si, et seulement si, $x^2-2y^2\in\{-1,1\}$, autrement dit

$$\boxed{z\in U\iff |x^2-2y^2|=1}.$$

III. Forme des éléments de U

5. Posons $x=1$ et $y=1$, alors $u=x+y\sqrt{2}$, $x\in\mathbb{N}^*$, $y\in\mathbb{N}^*$ et $|x^2-2y^2|=|1-2|=1$, donc d'après la question 4. $\boxed{u\in U_+}$.

6. Soit z appartenant à U_+ tel que $z\neq u$. Il existe alors (x,y) appartenant à $(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $z=x+y\sqrt{2}$ et $(x,y)\neq(1,1)$.
Puisque $z\in U$, alors d'après la question 4., $|x^2-2y^2|=1$, et donc ou bien $x^2=2y^2+1$, ou bien $x^2=2y^2-1$.

- Si $x^2=2y^2+1$, alors $x^2>2y^2$ et $x^2<2y^2+2$, donc $x>\sqrt{2}y$ et $x^2<4y^2$ (car x et y appartiennent à $\mathbb{N}^*$ et $2y^2\geqslant 2$). On a alors $x>y$ et $x<2y$ (puisque $\sqrt{2}>1$).
- Si $x^2=2y^2-1$, alors $x^2<2y^2$, donc $x<\sqrt{2}y$, d'où $x<2y$ (car $2>\sqrt{2}$).
Si $y=1$, alors $x^2=1$, et donc $x=1$, ce qui est contradictoire, puisque $z\neq u$. Ainsi $y>1$, donc $y^2>1$ et $2y^2-1>y^2$.
Nous obtenons ainsi $x^2>y^2$ et donc $x>y$ (car x et y appartiennent à $\mathbb{N}^*$).

Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{y<x<2y.}$

7. Soit z appartenant à U_+ tel que $z\neq u$. Il existe alors (x,y) appartenant à $(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $z=x+y\sqrt{2}$ et $y<x<2y$ d'après la question précédente. Nous calculons alors :

$$z'=\frac{z}{u}=\frac{x+y\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{(x+y\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{1-2}=\underbrace{-x+2y}_{\in\mathbb{N}^*}+\underbrace{(x-y)}_{\in\mathbb{N}^*}\sqrt{2}.$$

Ainsi $\boxed{z'\in U_+}$.

8. (a) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $z_n\in U_+$.

Initialisation: Puisque $z\in U_+$, alors $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité: Soit n appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors $z_n\in U_+$ et d'après notre hypothèse $z_n\neq u$, donc d'après la question précédente, $\dfrac{z_n}{u}\in U_+$, *i.e.* $z_{n+1}\in U_+$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion: D'après le principe de récurrence, $\forall\ n\in\mathbb{N},\ z_n\in U_+$.

$\boxed{\text{La suite } (z_k) \text{ est une suite d'éléments de } U_+.}$

(b) Commençons par remarquer que tout élément de U_+ est strictement supérieur à 1. Or, d'après la question précédente, $\forall\ k \in \mathbb{N},\ z_k \in U_+$ et donc :

$$z_k = \frac{z}{u^k} = \frac{z}{(1+\sqrt{2})^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad (\text{car } 1+\sqrt{2} > 1),$$

ce qui est contradictoire.
Nous en déduisons qu'il existe k_0 appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $z_{k_0} = u$ et donc tel que $z = u^{k_0+1}$.
Ainsi : $\forall\ z \in U_+,\ \exists\ n \in \mathbb{N}^* \ /\ z = u^n$, autrement dit : $\boxed{U_+ \subset \{u^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}}$.

9. Montrons que $\{u^n,\ n \in \mathbb{N}^*\} \subset U_+$.
Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, alors d'après la question 3. et un raisonnement par récurrence immédiat

$$N(u^n) = N(u)^n = (-1)^n.$$

Comme $(-1)^n$ est inversible dans $\mathbb{Z}$, alors $u^n \in U$ d'après la condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de la question 4.. De plus :

$$\begin{aligned} u^n &= (1+\sqrt{2})^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^k}_{\in \mathbb{N}^*} + \sqrt{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^k}_{\in \mathbb{N}^*}. \end{aligned}$$

Ainsi $u^n \in U_+$ et $\boxed{U_+ = \{u^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}}$.

10. Soit z appartenant à U. Il existe (x, y) appartenant à $\mathbb{Z}^2$ tel que $z = x + y\sqrt{2}$.
   - Si $y = 0$, alors $z = 1$, ou $z = -1$ d'après la question 4..
   - Si $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, alors $z \in U_+$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z = (1+\sqrt{2})^n$ d'après la question précédente.
   - Si $x \leqslant -1$ et $y \leqslant -1$, alors $-z \in U_+$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $-z = (1+\sqrt{2})^n$ et donc tel que $z = -(1+\sqrt{2})^n$.
   - Si $x \geqslant 1$ et $y \leqslant -1$, alors $\varphi(z) \in U_+$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(z) = (1+\sqrt{2})^n$ et donc tel que $z = \varphi^{-1}\left((1+\sqrt{2})^n\right) = \varphi\left((1+\sqrt{2})^n\right) = (1-\sqrt{2})^n$.
   - Si $x \leqslant -1$ et $y \geqslant 1$, alors $\varphi(-z) \in U_+$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(-z) = (1+\sqrt{2})^n$ et donc tel que $-z = \varphi^{-1}\left((1+\sqrt{2})^n\right)$, soit $z = -\varphi\left((1+\sqrt{2})^n\right) = -(1-\sqrt{2})^n$.

Nous en déduisons que :

$$U \subset \{1, -1\} \cup \left\{\varepsilon(1+\sqrt{2})^n,\ \varepsilon \in \{-1, 1\},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{\varepsilon(1-\sqrt{2})^n,\ \varepsilon \in \{-1, 1\},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

L'inclusion réciproque est vraie car tous les éléments dans l'ensemble à droite vérifie la condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de la question 4.. En effet $N(1) = N(-1) = 1$ et :

$$\begin{aligned} \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ \varepsilon \in \{-1; 1\},\ N\left(\varepsilon(1+\sqrt{2})^n\right) &= N(\varepsilon) N\left(1+\sqrt{2}\right)^n = (-1)^n \\ N\left(\varepsilon(1-\sqrt{2})^n\right) &= N(\varepsilon) N\left(1-\sqrt{2}\right)^n = (-1)^n. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{U = \{1, -1\} \cup \left\{\varepsilon(1+\sqrt{2})^n,\ \varepsilon \in \{-1, 1\},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{\varepsilon(1-\sqrt{2})^n,\ \varepsilon \in \{-1, 1\},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}}.$$

Problème 1

1) -a- La fonction nulle est continue sur $\mathbb{R}$, s'annule au moins une fois et vérifie évidemment la troisième condition, donc $\boxed{0 \in \mathcal{E}.}$

-b- La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ donc le cosinus s'annule au moins une fois.
$\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y-(x-y)}{2}\right) = 2\cos(x)\cos(y)$$

donc $\boxed{\cos \in \mathcal{E}.}$

-c- Si $f \in \mathcal{E}$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction f_ω est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues.
Si f s'annule en $a \in \mathbb{R}$ alors f_ω s'annule en $\dfrac{a}{\omega}$.
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$f_\omega(x+y) + f_\omega(x-y) = f(\omega x + \omega y) + f(\omega x - \omega y) = 2f(\omega x)f(\omega y) = 2f_\omega(x)f_\omega(y)$.
Ainsi $\boxed{f_\omega \in \mathcal{E}.}$

2) -a- Prenons $x = y = 0$, alors on a $2f(0) = 2\left(f(0)\right)^2$ et donc $\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1.}$

-b- Si $f(0) = 0$ alors avec $y = 0$ et x **quelconque**, on a $2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$ et donc $f(x) = 0$.
$\boxed{f \text{ est identiquement nulle.}}$

-c- Si $f(0) = 1$ alors en prenant $x = 0$ et y **quelconque**, on a $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$ d'où $f(-y) = f(y)$, donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

-d- Si $f(0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en prenant $\dfrac{x}{2}$ à la place de x et de y, on a :
$f(x) - f(0) = 2\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$ et donc $\boxed{f(x) = 2\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 - 1.}$

-e- Si f s'annule en $a \in \mathbb{R}^*$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(a + [a-x]) + f(a - [a-x]) = 2f(a)f(a-x)$ or $f(a) = 0$ donc $f(2a-x) + f(x) = 0$, d'où $\boxed{f(2a-x) = -f(x).}$
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(4a+x) = f(2a - [-2a-x]) = -f(-2a-x) = -f(2a+x)$ car f est paire or $f(2a+x) = -f(-x) = -f(x)$, donc $f(4a+x) = f(x)$ $\boxed{f \text{ est } 4a\text{−périodique.}}$

3) -a- On sait que f s'annule en un certain réel α, mais $f(0) = 1$ donc $\alpha \neq 0$, comme f est paire on a $f(|\alpha|) = f(\alpha) = 0$ avec $|\alpha| > 0$ donc $\boxed{f \text{ s'annule au moins une fois sur } \mathbb{R}_+^*.}$

-b- L'ensemble A est non vide d'après la question précédente, cet ensemble est minoré par 0, donc d'après la propriété de la borne inférieure $\boxed{A \text{ admet une borne inférieure.}}$

-c- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $a = \inf(A)$, le réel $a + \dfrac{1}{n}$ ne minore pas A donc il existe un élément t_n de A tel que $t_n < a + \dfrac{1}{n}$.
Puisque a minore A, on a bien $a \leqslant t_n < a + \dfrac{1}{n}$.
D'après le théorème d'encadrement , la suite (t_n) converge vers a, comme f est continue en a, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n) = f(a)$.
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \in A$, donc $f(t_n) = 0$ par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n) = 0$.
Par unicité de la limite, $\boxed{f(a) = 0}$.
A étant minoré par 0, $a \geqslant 0$ et puisque $f(0) \neq 0$ on a $a \neq 0$. On en déduit $\boxed{a > 0.}$

-d- Soit $x \in]0, a[$, par définition de a, $f(x) \neq 0$.
Si $f(x) < 0$ puisque $f(0) = 1$ le théorème des valeurs intermédiaires (son corollaire) appliqué à f continue sur l'intervalle $[0, x]$ fournit l'existence d'un élément $c \in [0, x]$ tel que $f(c) = 0$.
On obtient $0 < c < x < a$ et $f(c) = 0$. C'est absurde par définition de a donc $f(x) > 0$.

$$\boxed{\forall x \in [0, a[,\ f(x) > 0.}$$

4) -a- Soit $q \in \mathbb{N}$, d'après le 2.d, $\boxed{f\left(\frac{a}{2^q}\right) = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2 - 1}$ $(*)$

Récurrence sur q.
Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(q)$: $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
<u>Initialisation:</u> $f(a) = 0 = g(a)$ car $g(a) = \cos\left(\frac{\pi a}{2a}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité: Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(q)$ est vérifiée.

$\dfrac{a}{2^{q+1}} \in [0, a[$ donc d'après 3.d, $f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$.

On déduit alors de $(*)$, $f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right) = \sqrt{\dfrac{1 + f\left(\frac{a}{2^q}\right)}{2}}$.

D'après $\mathcal{P}(q)$,

$$f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = \sqrt{\frac{1 + g\left(\frac{a}{2^q}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{q+1}}\right)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{q+2}}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{q+2}}\right)$$

car $\dfrac{\pi}{2^{q+2}} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On obtient ainsi $f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{q+2}}\right) = g\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)$.

$\mathcal{P}(q+1)$ est vérifiée ce qui achève la récurrence.

-b- Soit $q \in \mathbb{N}$.

Récurrence à deux prédécesseurs sur $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(p)$: $f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$.

Initialisation: $f(0) = 0 = g(0)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

D'après 4.a, $\mathcal{P}(1)$ est également vérifiée.

Hérédité: Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(p-1)$ et $\mathcal{P}(p)$ sont vérifiées.

$$f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) = f\left(\frac{pa}{2^q} + \frac{a}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{pa}{2^q}\right) f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)$$

D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on a

$$f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) = 2g\left(\frac{pa}{2^q}\right) g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)$$

D'après 1.b et 1.c, $g \in \mathcal{E}$ donc $2g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right) g\left(\dfrac{a}{2^q}\right) - g\left(\dfrac{(p-1)a}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{(p+1)a}{2^q}\right)$.

par conséquent, $f\left(\dfrac{(p+1)a}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{(p+1)a}{2^q}\right)$

$\mathcal{P}(q+1)$ est vérifiée ce qui achève la récurrence.

-c- Soit $x \in \mathbb{R}$, $2^q \dfrac{x}{a} - 1 < \left\lfloor 2^q \dfrac{x}{a} \right\rfloor \leqslant 2^q \dfrac{x}{a}$. Puisque $\dfrac{a}{2^q} > 0$, on a $x - \dfrac{a}{2^q} < u_q \leqslant x$.

D'après le théorème d'encadrement, (u_q) converge vers x.

Posons $p = \left|\left\lfloor 2^q \dfrac{x}{a} \right\rfloor\right|$ alors $p \in \mathbb{N}$. Comme f et g sont paires, $f(u_p) = f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$ et $g(u_p) = g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$.

Le 4.b permet alors de conclure $\boxed{f(u_q) = g(u_q).}$

-d- La suite (u_q) converge vers x, les fonctions f et g sont continues donc la suite $(f(u_q))$ converge vers $f(x)$ et la suite $(g(u_q))$ converge vers $g(x)$, or ces deux suites sont égales, donc :

$$\boxed{f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right).}$$

5) On a montré aux 2.b et 4.d que

$$\mathcal{E} \subset \{f \equiv 0\} \cup \left\{ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right) \end{array} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

On vérifie alors la réciproque: ces fonctions conviennent c'est-à-dire sont continues, s'annulent au moins une fois sur $\mathbb{R}$ et vérifient l'équation fonctionnelle. C'est la question 1.