

Calcul de DL

Exercice 1. (♥)

1) Calculer les développements limités suivants au voisinage de 0:

- | | | |
|---|--|---|
| -a- $\frac{x e^{-2x}}{1-3x}$ à l'ordre 2 | -e- $\sin^2 x \cos^2 x$ à l'ordre 4 | -j- $\text{Arctan } x e^{(x^2)}$ à l'ordre 3 |
| -b- $\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}}$ à l'ordre 3 | -f- $\sin^2 x$ à l'ordre 5 | -k- $\frac{\text{Arcsin } x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 2 |
| -c- $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2 | -g- $\sin^3 x$ à l'ordre 5 | |
| -d- $e^{\cos x}$ à l'ordre 4 | -h- $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2 | |
| | -i- $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ à l'ordre 3 | -l- e^{e^x} à l'ordre 2 |

2) Pour les fonctions des questions a-b-f-g-j, préciser la tangente à la courbe (au point d'abscisse 0) et sa position par rapport à la courbe. Vous ferez un schéma illustratif

3) On note f la fonction d'expression de la question -b-. Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

NB : et pour ceux qui veulent se muscler davantage vous augmentez d'un les ordres des DL ci-dessus.

Exercice 2. (♥) Calculer les développements limités suivants

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{1}{x}$ au voisinage de 3 à l'ordre 2 | 3) $\frac{\ln x}{x}$ au voisinage de 2 à l'ordre 2 |
| 2) \sqrt{x} au voisinage de 4 à l'ordre 2 | 4) $(\sin x)^x$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 2 |

Exercice 3. (*) Déterminer le $DL_5(0)$ de $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercice 4. (*) DL d'une réciproque

- Retrouver le $DL_5(0)$ de \tan en utilisant le DL_5 de $\text{Arctan } c$ et le fait que Arctan est la réciproque de \tan .
- Soit f définie par $f(x) = x e^{x^2}$.
 - Montrer que f admet une réciproque impaire de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
 - Déterminer le $DL_5(0)$ de f^{-1} .

Exercice 5. (*) Retrouver le $DL_5(0)$ de \tan en utilisant $\tan' = 1 + \tan^2$.

Calcul de limites et d'équivalents

Exercice 6. (♥) Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de

- | | | |
|-------------------------------------|---|--|
| 1) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ | 2) $\ln(1 + \sin x) - \sin(\ln(1 + x))$ | 3) $\frac{\ln(\cos x) + \frac{\sin^2 x}{2}}{\sin^3 x}$. |
|-------------------------------------|---|--|

Exercice 7. (♥) Calculer les limites suivantes

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\text{Arctan } x - x}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\ln(1+x) - \sin x)}{\tan x - x}$ | 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1 \right)$ |
|--|---|--|

Exercice 8. (♥)

- | | |
|---|---|
| 1) Déterminer un équivalent de $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 2) Calculer la limite de $u_n = \left(\frac{\cos \frac{1}{n} + \text{ch } \frac{1}{n}}{2}\right)^{n^4}$. |
|---|---|

Autres applications des DL

Exercice 9. (*)

- 1) Montrer que la fonction f définie sur $] - 1, 0[\cup] 0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ admet un prolongement en 0 de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, +\infty[$.
- 2) Montrer que la fonction f définie sur $] - \frac{\pi}{2}, 0[\cup] 0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}$ admet un prolongement en 0 de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 10. (♡) Déterminer le signe de $u_n = \operatorname{sh} \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 11. (*) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f la fonction définie au voisinage de 0 par $f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion.

Exercice 12. (**) Soit h continue sur $[0, +\infty[$ telle que $h(x) = o_{x \rightarrow 0}(x)$. Montrer que : $\int_x^{2x} h(t) dt = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Exercice 13. (*) Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$.

Développement asymptotique

Exercice 14. (*) Déterminer un équivalent de $\operatorname{sh} x \ln(\sin x) - x \ln x$ au voisinage de 0.

Exercice 15. (♡) Déterminer un développement asymptotique de $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 16. (**) Déterminer un développement asymptotique de $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 17. (**) Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}} dx = a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 18. (♡) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$.

Donner un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$ à la précision $\frac{1}{x}$. En déduire que \mathcal{C}_f possède une asymptote au voisinage de $\pm\infty$ dont on précisera l'équation et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 19. (*) Faire l'étude locale au voisinage de $+\infty$ (limite, équivalent, asymptote, position par rapport à la courbe) des fonctions suivantes:

1) $f(x) = \sqrt{x^3 \operatorname{sh} \frac{1}{x}}$

2) $f(x) = x(\ln(2x+1) - \ln x)$.

Quelques solutions

Exercice 1

1) $x + x^2 + o(x^2)$

2) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3 + o(x^3)$

3) $e - \frac{e}{2}x + \frac{11}{24}ex^2 + o(x^2)$

4) $e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{6}ex^4 + o(x^4)$

5) $x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$

6) $x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$

7) $x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$

8) $1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

9) $1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$

10) $x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

11) $1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$

12) $e + ex + ex^2 + o(x^2)$

Exercice 2

1) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{27}(x-3)^2 + o((x-3)^2)$

2) $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + o((x-4)^2)$

3) $\frac{1}{2} \ln 2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln 2)(x-2) + (-\frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2)(x-2)^2 + o((x-2)^2)$

4) $1 - \frac{\pi}{4}(x - \frac{\pi}{2})^2 + o((x - \frac{\pi}{2})^2)$