Exercice 12. ($**$) Soient p et q deux entiers supérieurs à 2, premiers entre eux. Montrer que $(X^p-1)(X^q-1)|(X-1)(X^{pq}-1)$.

Correction - Les racines de X^q-1 sont les racines q-ème de l'unité : $\alpha_k = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{q}}$ où $k\in[\![0,q-1]\!]$.
Les racines de X^p-1 sont les racines p-ème de l'unité : $\beta_k = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{p}}$ où $k\in[\![0,p-1]\!]$.

$$X^p-1=\prod_{k=0}^{p-1}(X-\alpha_k) \qquad X^q-1=\prod_{k=0}^{q-1}(X-\beta_k).$$

$X-1$ est un diviseur commun de X^p-1 et X^q-1. Et il n'y en a pas d'autres, en effet, supposons par l'absurde qu'il existe $k\in[\![1,q-1]\!]$ et $h\in[\![1,p-1]\!]$, tel que $\alpha_k=\beta_h$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{q}}=\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,h\pi}{p}}$ c'est-à-dire $\dfrac{2k\pi}{q}=\dfrac{2h\pi}{p}$ (car ces deux arguments sont éléments de $[0,2\pi[$), donc $\dfrac{k}{q}=\dfrac{h}{p}$ c'est-à-dire $kp=hq$. Alors $p|hq$ or $p\wedge q=1$ donc $p|h$, ce qui est absurde car $0\leqslant h\leqslant p-1$.
Notons que l'on a aussi $X-1|X^{pq}-1$. Posons donc Q,R,S trois polynômes tels que :

$$X^p-1=(X-1)P \qquad X^q-1=(X-1)Q \qquad P\wedge Q=1 \qquad X^{pq}-1=(X-1)R.$$

Notons ensuite que $X^p-1|X^{pq}-1$ (il suffit d'écrire $X^{pq}-1=(X^p)^q-1$ et d'appliquer la formule de factorisation), de même $X^q-1|X^{pq}-1$.
Donc $(X-1)P|(X-1)R$ et $(X-1)Q|(X-1)R$, donc $P|R$ et $Q|R$. Puis comme $P\wedge Q=1$, alors $PQ|R$. On en déduit, $(X-1)^2PQ|(X-1)^2R$, or

$$(X-1)^2PQ=(X-1)P(X-1)Q=(X^p-1)(X^q-1) \qquad (X-1)^2R=(X-1)(X-1)R=(X-1)(X^{pq}-1).$$

Donc $\boxed{(X^p-1)(X^q-1)|(X-1)(X^{pq}-1).}$

Exercice 14. ($\heartsuit$) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $P=nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$. Montrer que P est divisible par $(X-1)^3$. Est-il divisible par $(X-1)^4$?

Correction - Pour $n\geqslant 2$, $\widetilde{P}(1)=n1^{n+2}-(n+2)1^{n+1}+(n+2)1-n=0$.
$P'=n(n+2)X^{n+1}-(n+2)(n+1)X^n+(n+2)$ donc $\widetilde{P'}'(1)=n(n+2)1^{n+1}-(n+2)(n+1)1^n+(n+2)=0$.
$P''=(n+1)n(n+2)X^n-n(n+2)(n+1)X^{n-1}$ donc $\widetilde{P''}(1)=(n+1)n(n+2)1^n-n(n+2)(n+1)1^{n-1}=0$.
$P'''=n(n+1)n(n+2)X^{n-1}-(n-1)n(n+2)(n+1)X^{n-2}$ donc $\widetilde{P'''}(1)=n(n+1)n(n+2)1^{n-1}-(n-1)n(n+2)(n+1)1^{n-2}=n(n+2)(n+1)(n-(n-1))=n(n+2)(n+1)\neq 0$ Donc d'après la caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées, 1 est de multiplicité 3, donc $\boxed{(X-1)^3|P \text{ et } (X-1)^4 \text{ ne divise pas } P}$.
Si $n=1$, $P=X^3-3X^2+3X-1=(X-1)^3$ donc là aussi $(X-1)^3|P$ et $(X-1)^4$ ne divise pas P.

Exercice 16. ($\heartsuit$) Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P=X^4-4X^3+11X^2-14X+10$.

1) Vérifier que $1+\mathrm{i}$ est racine de P.
2) En déduire un polynôme $Q\in\mathbb{R}[X]$ de degré 2 divisant P.
3) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction -

1) $\widetilde{P}(1+\mathrm{i})=0$ après calculs. Donc $1+\mathrm{i}$ est racine de P.
2) Comme $P\in\mathbb{R}[X]$ alors $1-\mathrm{i}$ est aussi racine de P donc $X^2-2\Re(1+\mathrm{i})X+|1-\mathrm{i}|^2=X^2-2X+2$ divise P.
3) $P=(X^2-2X+2)(X^2-2X+5)$. Ces deux polynômes sont de discriminant <0 donc c'est bien la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 18. ($**$) Soient $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $P=(X+1)^n-\mathrm{e}^{2n\,\mathrm{i}\,a}$.

1) Trouver les racines de P.
2) En calculant le produit de ces racines, déterminer une expression simple de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)$.

Correction - Soit $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $P=(X+1)^n-\mathrm{e}^{2n\,\mathrm{i}\,a}$.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\widetilde{P}(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)^n = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,na} \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,a}}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \;/\; \frac{z+1}{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,a}} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \;/\; z = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}+2\,\mathrm{i}\,a} - 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \;/\; z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{n}+a\right)} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{n}+a\right)} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{n}+a\right)}\right)$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \;/\; z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{n}+a\right)} \times 2\,\mathrm{i}\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right).$$

D'où $\boxed{\text{l'ensemble des racines de } P\text{: } \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{n}+a\right)} \times 2\,\mathrm{i}\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \;/\; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$.

2) Notons α, le produit des racines et β le produit cherché $\beta = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$. D'une part, on détermine α à l'aide des coefficients dominant et constant de P.
$\deg((X+1)^n) = n$ et $\mathrm{e}^{2n\,\mathrm{i}\,a} \in \mathbb{C}$ d'où $\deg(P) = n$. Le coefficient dominant de P est donc celui de $(X+1)^n$ à savoir 1. Et le terme constant de $(1+X)^n$ est 1 donc le coefficient constant de P est $1 - \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,na}$. D'où,

$$\alpha = (-1)^n(1 - \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,na}) = (-1)^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,na} \left(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,na} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,na}\right) = (-1)^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,na} \times (-2\,\mathrm{i}\sin(na))$$
$$\alpha = (-1)^{n+1} 2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,na}\, \mathrm{i}\sin(na).$$

D'autre part d'après l'expression des racines trouvée en 1),

$$\alpha = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{n}+a\right)} \times 2\,\mathrm{i}\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{n}+a\right)} \prod_{k=0}^{n-1} 2\,\mathrm{i} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k\pi}{n}+a\right)}\, 2^n\, \mathrm{i}^n\, \beta$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} a\right)}\, 2^n\, \mathrm{i}^n\, \beta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}+na\right)}\, 2^n\, \mathrm{i}^n\, \beta$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,na} \underbrace{\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{2}}\right)^{n-1}}_{=I^{n-1}} 2^n\, \mathrm{i}^n\, \beta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,na} \underbrace{\mathrm{i}^{2n-1}}_{=\mathrm{i}^{2n}\frac{1}{\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,na}(-1)^n \times (-\,\mathrm{i})2^n\beta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,na}(-1)^{n+1}\,\mathrm{i}\,2^n\beta.$$

En identifiant les deux expressions de α, il vient:

$$(-1)^{n+1} 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,na}\sin(na) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,na}(-1)^{n+1}\,\mathrm{i}\,2^n\beta \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\beta = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}}.$$

Exercice 20. $(*)$ Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7 tels que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1]^4$ divise $P-1$.

Correction - Analyse : soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7 tels que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1]^4$ divise $P-1$. Alors d'après la caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées,

$$\widetilde{P+1}(1) = 0 \qquad \widetilde{P'}(1) = 0 \qquad \widetilde{P''}(1) = 0 \qquad \widetilde{P'''}(1) = 0 \qquad \widetilde{P^4}(1) \neq 0$$
$$\widetilde{P-1}(-1) = 0 \qquad \widetilde{P'}(-1) = 0 \qquad \widetilde{P''}(-1) = 0 \qquad \widetilde{P'''}(-1) = 0 \qquad \widetilde{P^4}(-1) \neq 0.$$

Donc 1 et -1 sont racines de P' de multiplicité 3, et comme P est de degré 7 alors P' est de degré 6, donc P est de la forme

$$P' = \lambda(X-1)^3(X+1)^3 = \lambda(X^2-1)^3 = \lambda(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1) \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors $P = \lambda\left(\frac{X^7}{7} - 3\frac{X^5}{5} + 3\frac{X^3}{3} - X\right) + \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$. Comme $\widetilde{P+1}(1) = 0$ et $\widetilde{P-1}(-1) = 0$ donc $\widetilde{P}(1) = -1$ et $\widetilde{P}(-1) = 1$ c'est-à-dire

$$\begin{cases}\lambda\left(\frac{1}{7} - 3\frac{1}{5} + 3\frac{1}{3} - 1\right) + \mu = -1 \\ \lambda\left(-\frac{1}{7} + 3\frac{1}{5} - 3\frac{1}{3} + 1\right) + \mu = 1\end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases}-\frac{16}{35}\lambda + \mu = -1 \\ \frac{16}{35}\lambda + \mu = 1\end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases}\lambda = \frac{35}{16} \\ \mu = 0\end{cases}.$$

Donc $P = \frac{35}{16}\left(\frac{X^7}{7} - 3\frac{X^5}{5} + 3\frac{X^3}{3} - X\right)$.
Synthèse : on vérifie que ce polynôme satisfait les conditions voulues.
Conclusion : $\boxed{\frac{35}{16}\left(\frac{X^7}{7} - 3\frac{X^5}{5} + 3\frac{X^3}{3} - X\right) \text{ est l'unique polynôme cherché}}$.

Exercice 26. $(***)$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P}(x) \geqslant 0$.
Montrer qu'il existe A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.
On peut décomposer P dans $\mathbb{C}[X]$ et s'intéresser à l'ordre de multiplicité des racines réelles.

Correction - Soit α une racine réelle et m sa multiplicité. Alors $P = (X-\alpha)^m Q$ où $\widetilde{Q}(\alpha)(\alpha) \neq 0$.
Par continuité de la fonction polynomiale $\widetilde{Q}$, $\widetilde{Q}$ garde un signe constant au voisinage de α. Donc pour P soit positif au voisinage de α, m

doit être pair.
On a donc prouvé que la multiplicité des racines réelles est forcément paire.
En notant α_i les n racines réelles de P, et $2m_i$ leur multiplicité alors

$$P = \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{2m_i} S = \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{m_i}\right)^2}_{=C^2} S \quad \text{où} \quad S \in \mathbb{R}[X].$$

Le polynôme S est le produit d'un coefficient dominant $\lambda \geqslant 0$ et de polynômes de forme

$$(X-\beta)(X-\overline{\beta}) = (X^2 - 2\mathrm{Re}(\beta)X + |\beta|^2) = (X - \mathrm{Re}(\beta))^2 + \mathrm{Im}(\beta)^2 \quad \text{donc somme de deux carrés.}$$

Puis, on prouve que le produit de la somme de deux carrées est une somme de deux carrés :

$$(T^2+U^2)(V^2+W^2) = T^2V^2 + T^2W^2 + U^2V^2 + U^2W^2 = (TV+UW)^2 + (TW-UV)^2.$$

Donc de proche en proche, le polynôme S s'écrit : $S = \lambda(D^2+E^2)$ où D et E sont des polynômes à coefficient réels. Finalement :

$$P = \lambda C^2(D^2+E^2) = (\sqrt{\lambda}CD)^2 + (\sqrt{\lambda}CE)^2 = A^2 + B^2.$$

Exercice 28. $(*)$ Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que deux des racines du polynôme $X^3 - 5X^2 - 8X + \lambda$ aient une somme égale à -1. Déterminer alors les trois racines.

Correction - Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P = X^3 - 5X^2 - 8X + \lambda$. Notons α, β, γ les trois racines de P comptées avec multiplicité.
Analyse : supposons que deux des racines, α et β aient une somme égale à -1. Alors $\alpha + \beta = -1$.
D'après les relations coefficients-racines :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 5 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -8 \\ \alpha\beta\gamma = -\lambda \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \gamma = 6 \\ \alpha\beta - \gamma = -8 \\ \alpha\beta\gamma = -\lambda \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \gamma = 6 \\ \alpha\beta = -2 \\ -12 = -\lambda \end{cases}.$$

Donc $\lambda = 12$. Donc $P = X^3 - 5X^2 - 8X + 12$.
Synthèse : on pose $P = X^3 - 5X^2 - 8X + 12 = (X-6)(X^2+X-2) = (X-6)(X-1)(X+2)$. Donc les racines sont 6, 1, -2 et donc $-2+1 = -1$.
Conclusion : $\boxed{\text{deux des racines de } P = X^3 - 5X^2 - 8X + \lambda \text{ sont de multiplicité 1 ssi } \lambda = 12. \text{ Les racines dans ce cas sont } 6, 1, -2}$.

Exercice 29. $(**)$ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par $P = X^3 - 3X^2 - 10X + 24$ et α_1, α_2 et α_3 ses racines. Déterminer pour tout $k \in [\![1,5]\!]$, $S_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k$.
Pour $k \in \geqslant 3$, on pourra effectuer la DE de X^k par P.

Correction - Avec les notations habituelles, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = -10$, $\sigma_3 = -24$.
Donc $S_1 = \sigma_1 = 3$.
$S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 29$.

$$\begin{aligned} S_3 &= \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3 - 3(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_3^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_2) - 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ &= \sigma_1^3 - 3\left[\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) + \alpha_1\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3) + \alpha_2\alpha_3(\alpha_2+\alpha_3)\right] - 6\sigma_3 \\ &= \sigma_1^3 - 3\left[\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) + \alpha_1\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3) + \alpha_2\alpha_3(\alpha_2+\alpha_3)\right] - 6\sigma_3 \\ &= \sigma_1^3 - 3\left[\alpha_1\alpha_2(\sigma_1-\alpha_3) + \alpha_1\alpha_3(\sigma_1-\alpha_2) + \alpha_2\alpha_3(\sigma_1-\alpha_1)\right] - 6\sigma_3 \\ S_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 45. \end{aligned}$$

Pour S_3 on aurait pu faire autrement, on effecue la DE de X^3 par P :

$$X^3 = 1 \times P + 3X^2 + 10X - 24.$$

On évalue en α_i, $\alpha_i^3 = 3\alpha_i^2 + 10\alpha_i - 24$ car $P(\alpha_i) = 0$. On somme pour $i = 1, 2, 3$,

$$S_3 = 3S_2 + 10S_1 - 72 = 45.$$

Pour S_4, on effecue la DE de X^4 par P :

$$X^4 = (X+3) \times P + 9X^2 + 30X - 72.$$

On évalue en α_i, $\alpha_i^4 = 9\alpha_i^2 + 30\alpha_i - 72$ car $P(\alpha_i) = 0$. On somme pour $i = 1, 2, 3$,

$$S_4 = 9S_2 + 30S_1 - 216 = 135.$$