

Exercice 10. (*) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$. Montrer que $P_n^{(n)}$ s'annule exactement n fois sur $[-1, 1]$.

Correction - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrons tout d'abord que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P_n^{(k)}(-1) = 0$ et $P_n^{(k)}(1) = 0$.
Méthode 1 : avec des connaissances sur les polynômes, c'est rapide, $(X^2 - 1)^n = (X - 1)^n(X + 1)^n$ donc -1 et 1 sont des racines de $(X^2 - 1)^n$ de multiplicité $n - 1$, on utilise alors la caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées.
Méthode 2: on utilise la formule de Leibniz. On réécrit $P_n(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n$ pour en calculer les dérivées successives à l'aide la formule de Leibniz. La fonction P_n est polynomiale donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = (x - 1)^n$ et $v(x) = (x + 1)^n$, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$

$$u^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^{n-k} \quad v^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x+1)^{n-k}.$$

Soient $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P_n^{(k)}(x) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u^{(j)}(x)v^{(k-j)}(x) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!} (x-1)^{n-j} \frac{n!}{(n-k+j)!} (x+1)^{n-k+j}. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq k < n$, $P_n^{(k)}(1) = 0$ car tous les exposants $n - j$ sont strictement positifs et donc $(x - 1)^{n-j} = 0$, ainsi tous les termes de la somme sont nuls.

De même $P_n^{(k)}(-1) = 0$, car tous les exposants $n - k + j$ sont strictement positifs et donc $(x + 1)^{n-k+j} = 0$, ainsi tous les termes de la somme sont nuls.

- Pour montrer que $P_n^{(n)}$ s'annule n fois, on applique plusieurs fois le théorème de Rolle.
 - ▶ P_n est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$ et $P_n(-1) = P_n(1) = 0$. Donc, il existe $c_{1,1} \in] -1, 1[$ tel que $P_n'(c_{1,1}) = 0$.
 - ▶ Puis on applique de nouveau le théorème de Rolle (2 fois) à P_n' sur $[-1, c_{1,1}]$ et sur $[c_{1,1}, 1]$ car $P_n'(-1) = P_n'(c_{1,1}) = P_n'(1) = 0$. Il existe alors $c_{2,1} \in] -1, c_{1,1}[$ et $c_{2,2} \in] c_{1,1}, 1[$ tels que $P_n''(c_{2,1}) = P_n''(c_{2,2}) = 0$.
 - ▶ On applique alors le théorème de Rolle (3 fois) à P_n'' sur $[-1, c_{2,1}]$, $[c_{2,1}, c_{2,2}]$ et sur $[c_{2,2}, 1]$,...
 - ▶ On itère le procédé
 - ▶ La dérivée $n - 1$ -ième, $P_n^{(n-1)}$ s'annule en -1 , 1 et $n - 1$ valeurs intermédiaires deux à deux distinctes $c_{n-1,1}, \dots, c_{n-1,n-1}$. On applique alors le théorème de Rolle n fois pour obtenir que $P_n^{(n)}$ s'annule (au moins) n fois sur $[-1, 1]$. Pour montrer qu'elle s'annule exactement n fois, il faut utiliser un argument polynomial que l'on verra plus tard. P_n est de degré $2n$, donc $P_n^{(n)}$ est de degré n , donc s'annule au plus n fois. S'annulant aussi au moins n fois, $P_n^{(n)}$ s'annule alors exactement n fois sur $[-1, 1]$.

Exercice 12. (*) Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que $f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Correction - Soit $x > 0$. Il s'agit de prouver l'existence de c tel que : $f(x) - f(-x) - x(f'(c) + f'(-c)) = 0$.

On applique le théorème de Rolle à la fonction $\varphi : t \mapsto tf(x) - tf(-x) - x(f(t) - f(-t))$ sur l'intervalle $[-x, x]$. Toutes les hypothèses sont à vérifier [...]

Exercice 13. (**) Soient $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et f une fonction de classe C^2 sur $[a, a + 2h]$.

Montrer que : $\exists c \in]a, a + 2h[$ / $f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c)$. [On pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x + h) - f(x)$].

Correction - On pose $\varphi : x \mapsto f(x + h) - f(x)$. En appliquant le TAF à φ sur $[a, a + h]$ [...hypothèses à vérifier...], posons $\alpha \in]a, a + h[$ tel

$$\varphi(a + h) - \varphi(a) = h\varphi'(\alpha) = h(f'(\alpha + h) - f'(\alpha)).$$

Puis on applique le TAF à f' sur $[\alpha, \alpha + h]$ [...hypothèses à vérifier...], posons $c \in]\alpha, \alpha + h[$ tel

$$f'(\alpha + h) - f'(\alpha) = hf''(c).$$

On a donc $a < \alpha < c < \alpha + h < a + 2h$, et $\varphi(a + h) - \varphi(a) = h^2 f''(c)$, donc

$$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

Exercice 15. (**) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f' > 0$ sur $[0, 1]$.

Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geq mx$.

Correction - f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$, donc f' est continue sur le segment $[0, 1]$ donc f' admet un minimum sur $[0, 1]$ noté m . Comme $f' > 0$ alors $m > 0$.

Puis, fixons $x \in]0, 1]$. Si $x = 0$, l'inégalité $f(x) \geq mx$ est claire.

Si $x > 0$, on applique le TAF à f sur $[0, x]$, f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, posons alors $c \in]0, x[$ tel que : $f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c) = xf'(c) \geq xm$ car $x \geq 0$ et $f' \geq m$. Et donc $f(x) \geq mx$.

On a donc bien, $\boxed{\forall x \in [0, 1], f(x) \geq mx.}$

Exercice 17. (\heartsuit) Montrer que: $\forall (x, y) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]^2, |\tan x - \tan y| \leq 2|x - y|.$

Correction - Classique en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction \tan sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. La dérivée y est majorée par 2. *Détails et rédactions laissés au lecteur.*

Exercice 18. (\heartsuit) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{sh}(x)| \geq |x|.$

Correction - Classique en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction sh sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$ (le cas $x = 0$ est trivial). Reste alors minorer.

On peut aussi se contenter de le prouver pour $x > 0$ par le TAF. Et faire le cas $x < 0$ en prenant $-x > 0$ et en appliquant le cas $x > 0$. *Détails et rédactions laissés au lecteur.*

Exercice 19. (\heartsuit) Estimer l'erreur commise dans l'approximation suivante $\sqrt{10001} \approx 100.$

Correction - On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur l'intervalle $[10000, 10001]$. *Détails et rédactions laissés au lecteur.*

Exercice 20. (\heartsuit)

On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $f(x) = \frac{3}{4} \cos x.$

- 1) Montrer que f admet un unique point fixe α . Vérifier que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[.$
- 2) -a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, |f'(x)| \leq \frac{3}{4}.$
 -b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|.$
 -c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (\frac{3}{4})^n |u_0 - \alpha|$ puis que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\alpha.$
- 3) Pour quelle valeur de n peut-on affirmer que le terme u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Correction - Incontournable, archi classique, l'étude de suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f contractante (càd f K -lipschitzienne avec $K \in [0, 1[$) : un exemple a été traité en cours.

Exercice 21. (*) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x). \quad [\text{Poser } g(x) = \frac{f(x)}{x}, g(0) = ??]$$

Correction -

- **Analyse.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 vérifiant: $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x).$

En particulier avec $x = 0, f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0.$

On pose $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}.$ Alors g est continue en 0, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0) = g(0) \text{ (on a utilisé que } f \text{ est dérivable en 0).}$$

Notons enfin que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(2x) = \frac{f(2x)}{2x} = \frac{2f(x)}{2x} = g(x) \text{ (égalité également vraie en 0).}$$

Par conséquent, g est une fonction constante (ex. vu dans la fiche continuité). Donc il existe $a \in \mathbb{R},$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = a \text{ i.e. } f(x) = ax. \text{ Donc } f \text{ est linéaire.}$$

- **Synthèse.** Posons $f : x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}.$ Alors f est dérivable en 0 et:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2ax = 2f(x).$$

Donc f est solution du problème.

- **Conclusion.** $\boxed{\text{L'ensemble des fonctions cherchées est } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax \quad / \quad a \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.}$