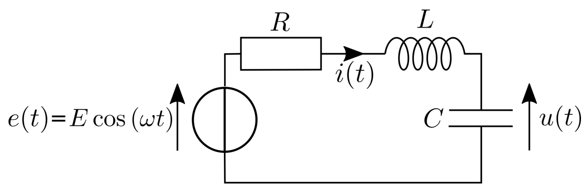
Résonances d'un circuit RLC

On étudie un circuit RLC série, constitué d'une résistance variable, d'un condensateur de capacité $C = 0,1$ µF et d'une bobine d'inductance L inconnue. Le circuit est soumis à une tension sinusoïdale générée par un GBF. On note $e(t) = E\cos(\omega t)$ la tension au bornes du GBF en circuit ouvert, $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u)$ la tension aux bornes du condensateur et $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$ l'intensité dans le circuit.



1 Résonance en charge

1. Établir l'expression de l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur et la mettre sous sa forme canonique :
$$\underline{U} = \frac{U_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$
Préciser les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.
2. Établir la condition de résonance ainsi que l'expression de la pulsation de résonance ω_r, en fonction de ω_0 et Q.
3. Réaliser le montage. Observer la tension aux bornes du GBF sur la voie 1 et la tension aux bornes du condensateur sur la voie 2.

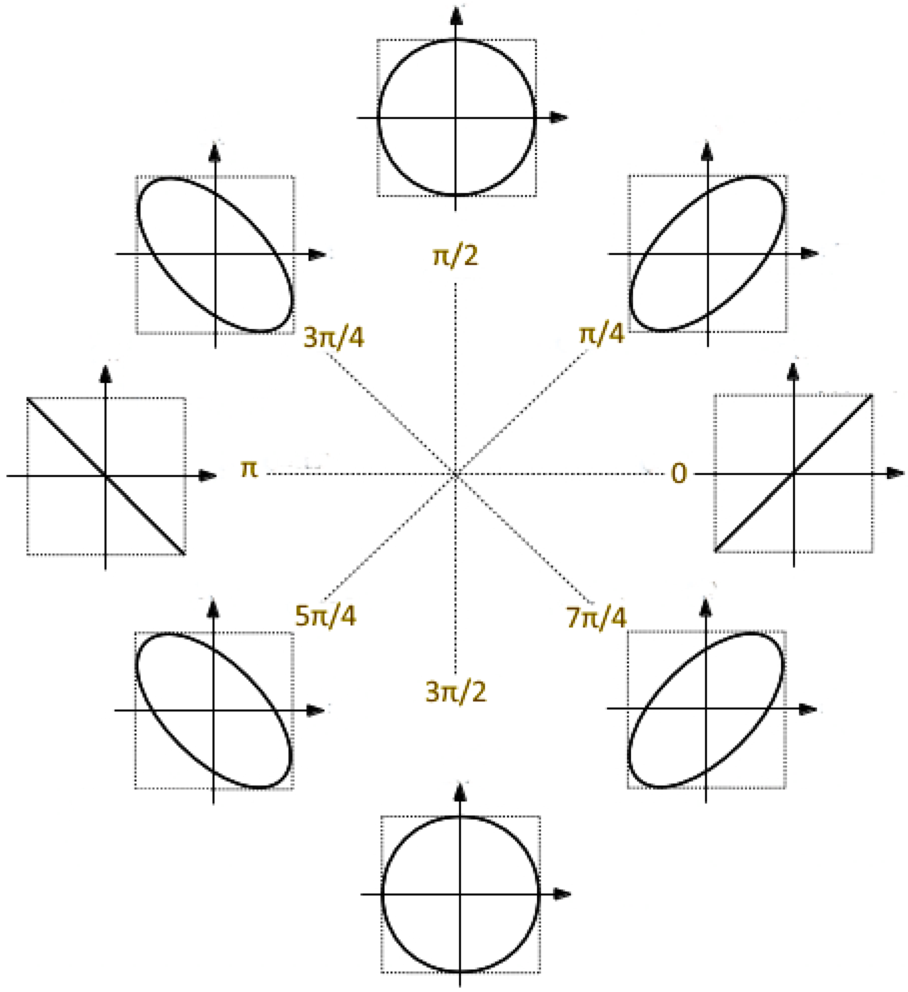
On fixe $R = 1$ kΩ.

4. Que vaut $\varphi_u(\omega_0)$? Observer les signaux en mode XY (Utility ▷ Affichage ▷ Mode XY). Faire varier la fréquence du GBF et déterminer la fréquence propre f_0.
5. Déduire de f_0 la valeur de L. Calculer Q et la fréquence de résonance f_r.
6. En faisant varier la fréquence du GBF, observer la résonance (en mode temporel). Relever la valeur de la fréquence de résonance f_r.
7. Calculer la valeur R_{lim} de la résistance correspondant à la limite de résonance. Vérifier expérimentalement.

2 Résonance en intensité

On fixe $R = 1$ kΩ.

8. Établir l'expression de l'amplitude complexe de $i(t)$ et la mettre sous la forme :
$$\underline{I} = \frac{I_0}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$
9. Que vaut la pulsation de résonance ?
10. Proposer puis réaliser un montage pour visualiser la tension aux bornes du GBF sur la voie 1 de l'oscilloscope et l'image de l'intensité sur la voie 2.
11. Mesurer la fréquence propre f_0 par deux méthodes (en mode temporel et en mode XY).
12. Pour des fréquences f entre 100 Hz et 1 kHz, mesurer $u_{R\text{eff}}$ et $\varphi_i(f)$. En utilisant python, tracer les graphes de $u_{R\text{eff}}(f)$ et φ_i.
13. Superposer la droite horizontale $u_{R\text{eff}} = u_{R\text{eff}_{\text{max}}}/\sqrt{2}$ sur le graphe d'amplitude, avec $u_{R\text{eff}_{\text{max}}} = E/\sqrt{2}$. En utilisant les graphes, retrouver les valeurs de f_0 et Q. *On rappelle que la largeur de la bande passante est donnée par*
$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$$



Allure du graphe en mode XY en fonction du déphasage entre deux voies

Résonances d'un circuit RLC - Correction

1 Résonance en charge

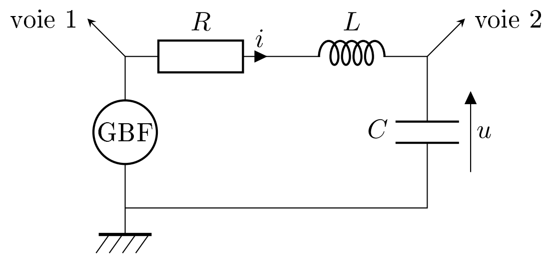
1. On reconnait un diviseur de tension, d'où $\underline{U} = \dfrac{\frac{1}{jC\omega}E}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} = \dfrac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

   On identifie $\begin{cases} U_0 = E \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases}$, d'où $\begin{cases} U_0 = E \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$

2. $U = \dfrac{E}{\sqrt{f(\frac{\omega}{\omega_0})}}$ avec $f(x) = (1-x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2$

   On étudie les variations de f sur $\mathbb{R}_+$: $f'(x) = 2(1-x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2} = 2x(2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2})$
   $f'(x) \geq 0$ (avec $x \geq 0$) $\Leftrightarrow 2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 - \frac{1}{2Q^2}$
   f' change de signe si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$, c'est-à-dire $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$
   La pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

3.



4. $\underline{U}(\omega_0) = -jQE$ donc $\varphi_u(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$: les signaux sont en quadrature.
   On observe les signaux en mode XY à l'oscilloscope. On fait varier la fréquence du GBF jusqu'à obtenir une ellipse, d'axes X et Y. On obtient $f_0 = 414$ Hz.

5. $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ avec $\omega_0 = 2\pi f_0$, donc $L = \frac{1}{C(2\pi f_0)^2} = 1,48$ H
   $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 3,84$
   $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ donc $f_r = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = 407$ Hz

6. On fait varier la fréquence du GBF jusqu'à observer un maximum de l'amplitude du signal $u(t)$ sur la voie 2 de l'oscilloscope. On mesure $f_r = 410$ Hz, ce qui est cohérent avec la valeur calculée précédemment.

7. La limite de résonance correspond à $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{R_{\text{lim}}}\sqrt{\frac{L}{C}}$, d'où $R_{\text{lim}} = \sqrt{2\frac{L}{C}} = 5437\ \Omega$
   Pour vérifier expérimentalement cette valeur, on se place à $R = R_{\text{lim}}$. On fait varier la fréquence du GBF et on observe que l'amplitude du signal $u(t)$ sur la voie 2 ne fait que décroitre, lorsque f augmente.

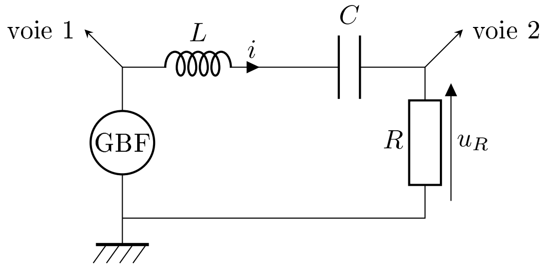
2 Résonance en intensité

8. La loi des mailles en régime sinusoïdal s'écrit : $\underline{e} - (R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega})\underline{i} = 0$, d'où $\underline{I} = \dfrac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$

   On identifie $\begin{cases} I_0 = \frac{E}{R} \\ \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases}$, d'où $\begin{cases} I_0 = \frac{E}{R} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$

9. Le terme $(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2 \geq 0$ s'annule en $\omega = \omega_0$, donc admet un minimum en ω_0.
   Par composition, $I = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$ admet donc une résonance en ω_0.

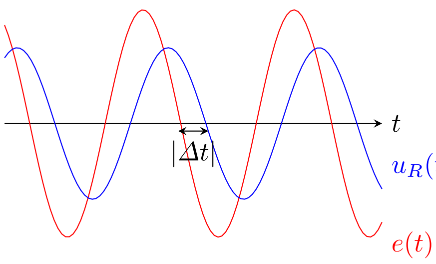
10. Il faut observer la tension $u_R = Ri$ aux bornes de R, qui doit être connectée à la masse de GBF.



11. $\underline{I}(\omega_0) = \frac{E}{R}$ donc $\varphi_i(\omega_0) = 0$: e et i sont en phase.
    - **En mode temporel :** on fait varier la fréquence du GBF jusqu'à ce que l'amplitude du signal $u_R(t)$ sur la voie 2 soit maximale.
    - **En mode XY :** on fait varier la fréquence du GBF jusqu'à ce qu'on observe une droite en mode XY.
12. Pour mesurer $u_{R\mathrm{eff}}$, on utilise un voltmètre en AC, ou la mesure automatique de l'oscilloscope.

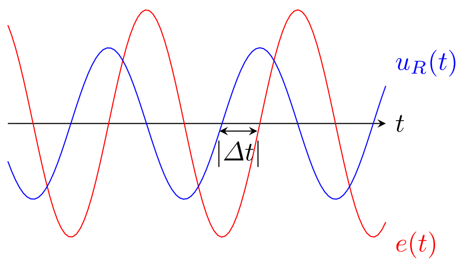
    Pour mesurer φ_i, on relève le décalage temporel $|\Delta t|$ entre les 2 courbes à l'oscilloscope, à l'aide des curseurs.

Si u_R est en retard de phase sur e,



$$\Delta\varphi = -\omega|\Delta t| = -2\pi f|\Delta t|$$

Si u_R est en avance de phase sur e,



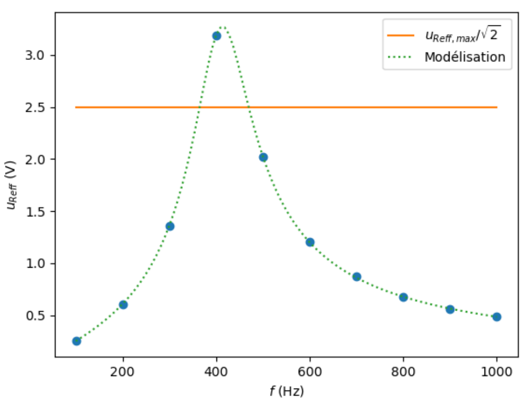
$$\Delta\varphi = \omega|\Delta t| = 2\pi f|\Delta t|$$

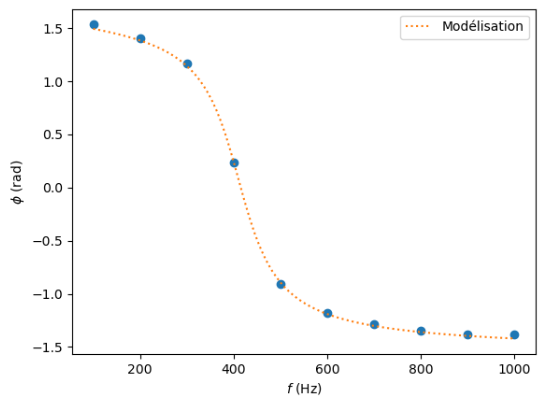
On peut également faire une mesure automatique à l'oscilloscope.

```
from math import pi
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f=np.arange(100,1100,100)
ueff=np.array([1.06,2.17,3.15,3.58,3.41,3.02,2.65,2.32,2.05,1.84])
Deltat=np.array()*1e-6
phi=2*pi*f*Deltat

plt.plot(f,ueff,'o')
plt.plot(f,phi,'o')
```





13. Graphiquement, on relève les fréquences de de coupure f_c telles que $u_{R\mathrm{eff}}(f) = \frac{u_{R\mathrm{eff}\max}}{\sqrt{2}}$.

    $f_{c1} = 365$ Hz et $f_{c2} = 469$ Hz

    $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{f_{c2} - f_{c1}} = 3,98$, c'est cohérent avec la valeur obtenue dans la partie 1.