Chute dans l'air

On étudie la chute dans l'air d'un moule en papier de section S et de masse m.
Le moule est soumis à une force de trainée :

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho C_x S v \vec{v}$$

où ρ est la masse volumique de l'air et C_x est le coefficient de traînée qui dépend de la forme de l'objet.

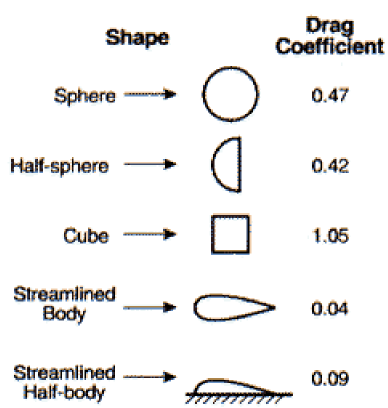
Données :

— Intensité du champ de pesanteur : $g = 9,81$ m.s^{-2}

— Masse volumique de l'air ($T = 20$°C, $P = 1,013$ bar, humidité relative= 50%) : $\rho = 1,199$ kg.m^{-3}

— On néglige $u(g)$ et $u(\rho)$.

1. Justifier que la poussée d'Archimède est négligeable.
2. Établir l'expression de la vitesse limite v_{lim} atteinte par le moule.
3. Rédiger un protocole expérimental pour déterminer le coefficient de traînée d'un moule en papier, à l'aide d'une caméra.
4. Réaliser 5 mesures de v_{lim} avec le même moule en papier. En déduire la valeur moyenne $\bar{v}_{\text{lim}}$ et l'incertitude-type $u(\bar{v}_{\text{lim}})$.
5. En pesant plusieurs moules à la fois, déterminer la masse m d'un seul moule, ainsi que l'incertitude-type sur cette mesure.
6. Mesurer le diamètre extérieur d du moule. Évaluer l'incertitude-type $u(d)$ sur cette mesure.
7. Déterminer le résultat de la mesure de C_x. On pourra estimer l'incertitude-type $u(C_x)$ de deux manières différentes :
   — en utilisant les formules de composition des incertitudes
   — en réalisant une simulation Monte-Carlo.
8. Confronter le résultat de la mesure avec les coefficients de traînée donnés ci-dessous.



Measured Drag Coefficients

Chute dans l'air - Correction

1. On compare la poussée d'Archimède au poids.
   $P = mg = \rho_{\text{papier}} V g$ et $\Pi = \rho V g$, donc $\frac{P}{\Pi} = \frac{\rho_{\text{papier}}}{\rho} \gg 1$, car un solide est beaucoup plus dense qu'un gaz à température et pression ambiantes.
2. Lorsque le moule atteint $\vec{v}_{\text{lim}}$, d'après le principe d'inertie, $\vec{P} + \vec{f} = \vec{0}$, d'où $m\vec{g} - \frac{1}{2}\rho C_x S v_{\text{lim}} \vec{v}_{\text{lim}}$, soit $v_{\text{lim}}\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{2m}{\rho C_x S}\vec{g}$, donc (en prenant la norme) $\boxed{v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_x S}}}$
3. **Protocole de mesure de Cx**
   - Filmer la chute d'un moule.
   - Étalonner la vidéo.
   - Réaliser un pointage vidéo.
   - Tracer le graphe $y(t)$.
   - Modéliser la partie rectiligne de la courbe par une fonction affine ; relever le coefficient directeur v_{lim}.
   - Peser 20 moules ; diviser par 20 pour obtenir m.
   - Mesurer le diamètre d de la section externe du moule.
   - Calculer $C_x = \frac{2mg}{\rho S v^2}$ avec $S = \pi(\frac{d}{2})^2$.
4.
```python
import numpy as np
v=[1.287,1.225,1.106,1.056,1.155] #m/s
vmoy=np.mean(v)
uvmoy=np.std(v, ddof=1)/np.sqrt(len(v))
```
   On obtient $\bar{v}_{\text{lim}} = 1,166$ m/s avec $u(\bar{v}_{\text{lim}}) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = 0,041$ m/s.
5. On mesure la masse de 20 moules avec une balance au dg : $20m = 5,0$ g, $\Delta = 0,1$ g
   $m = 0,250$ g
   $u(20m) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$, d'où $u(m) = \frac{\Delta}{20\sqrt{3}} = 2,9 \times 10^{-3}$ g
6. La principale source d'incertitude sur la mesure de d est la présence des cannelures sur le moule. On mesure le diamètre externe aux cannelures $d_{\text{max}} = 7,5$ cm et le diamètre interne $d_{\text{min}} = 7,3$ cm, d'où $d = \frac{d_{\text{max}} + d_{\text{min}}}{2} = 7.4$ cm et $\Delta_d = \frac{d_{\text{max}} - d_{\text{min}}}{2} = 0,1$ cm.
   $u(d) = \frac{\Delta_d}{\sqrt{3}} = 0,058$ cm
7. $C_x = \frac{2mg}{\rho S v_{\text{lim}}^2}$ avec $S = \pi(\frac{d}{2})^2$, soit $C_x = \frac{8mg}{\rho\pi d^2 v_{\text{lim}}^2}$.
   On obtient $C_x = 0,6998$.
   Par composition des incertitudes, $(\frac{u(C_x)}{C_x})^2 = (\frac{u(m)}{m})^2 + (\frac{u(d^2)}{d^2})^2 + (\frac{u(v_{\text{lim}})}{v_{\text{lim}}^2})^2 = (\frac{u(m)}{m})^2 + 2(\frac{u(d)}{d})^2 + 2(\frac{u(v_{\text{lim}})}{v_{\text{lim}}})^2$
   d'où $u(C_x) = C_x\sqrt{(\frac{u(m)}{m})^2 + 2(\frac{u(d)}{d})^2 + 2(\frac{u(v_{\text{lim}})}{v_{\text{lim}}})^2} = 0,037$.

   On obtient un résultat similaire par simulation Monte-Carlo.

```python
import numpy.random as rd
g=9.81 #m.s-2
rho=1.199 #kg.m-3
m=0.25e-3 #kg
Deltam=0.1e-3/20 #kg
d=7.4e-2 #m
Deltad=0.1e-2 #m

N=10**4 #nombre de tirage MonteCarlo
vMC=rd.normal(vmoy,uvmoy,N)
mMC=rd.uniform(m-Deltam,m+Deltam,N)
dMC=rd.uniform(d-Deltad,d+Deltad,N)

CxMC=8*mMC*g/rho/np.pi/dMC**2/vMC**2
uCx=np.std(CxMC)
```