

Constante de raideur d'un ressort

Proposer puis réaliser deux protocoles expérimentaux pour mesurer la constante de raideur d'un ressort. Comparer les résultats des 2 mesures.

Matériel :

- Ressort
- Potence + tige
- Boîte de masses
- Règle graduée (50 cm)
- Chronomètre

Constante de raideur d'un ressort - Correction

Méthode statique

On considère une masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . A l'équilibre, d'après le principe d'inertie $\vec{P} + \vec{F}_r = \vec{0}$, soit selon \vec{u}_z (vers le bas) : $mg - k(\ell - \ell_0) = 0$, d'où $\ell = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

Protocole :

- Suspendre différentes masses m au ressort. Mesurer à la règle la longueur ℓ du ressort dans chaque cas.
- Tracer le graphe $\ell(m)$.
- Modéliser la courbe par une fonction affine. En déduire le coefficient directeur a .
- Calculer $k = \frac{g}{a}$.

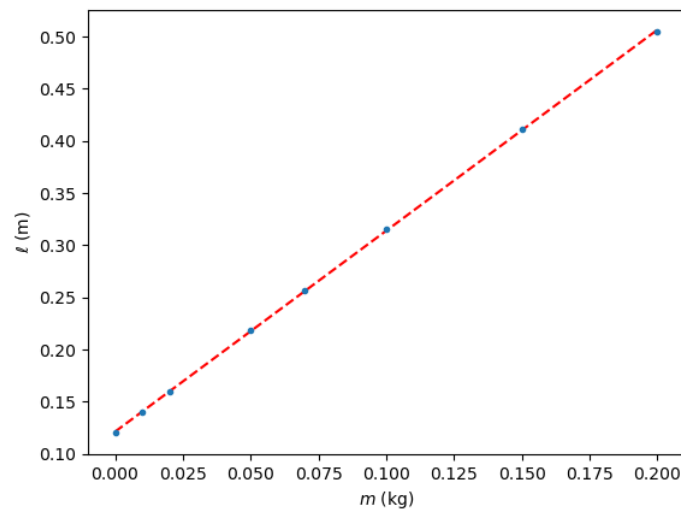
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m=np.array([0,10,20,50,70,100,150,200])*1e-3 #kg
l=np.array([12.0,14.0,16.0,21.85,25.65,31.5,41.1,50.5])*1e-2 #m
Deltal=1e-3 #m
plt.plot(m,l,'.')
```

```
plt.show()
```

```
a,b=np.polyfit(m,l,1) #modélisation
plt.plot(m,a*m+b) #droite modèle
```

```
g=9.81 #m.s-2
k=g/a
```



On obtient $k = 5,0934 \text{ N/m} = \text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$.

Estimation de l'incertitude

La principale source d'incertitude sur ℓ est la difficulté de bien repérer les 2 extrémités du ressort : on estime $\Delta = 1 \text{ mm}$, d'où $u(\ell) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = 0,58 \text{ mm}$. Pour estimer l'incertitude sur k , on propage l'incertitude sur a par simulation Monte-Carlo. Pour cela, on réalise N tirages des 8 valeurs de ℓ selon une loi uniforme de demi-étendue $\Delta = 1 \text{ mm}$. Pour chaque tirage, on modélise $\ell(m)$ par une fonction affine, on détermine le coefficient directeur a et on en déduit k . L'écart-type de la série des k obtenus donne l'incertitude-type $u(k)$.

```
N=10**4
kMC=[]
for j in range(N):
    lMC=rd.uniform(l-Deltal,l+Deltal)
    a,b=np.polyfit(m,lMC,1)
    kMC.append(g/a)
uk=np.std(kMC)
```

Ainsi, le résultat de la mesure est : $k = 5,0934 \text{ N/m}$ avec $u(k) = 0,0081 \text{ N/m}$.

Méthode dynamique

L'équation du mouvement d'une masse suspendue à un ressort est : $m\ddot{z} = mg - k(z - \ell_0)$, soit $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\ell_0 + g$.

On identifie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, d'où $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Protocole :

- Suspendre différentes masses au ressort. Pour chaque masse, tirer la masse vers le bas et lâcher. Mesurer 20 périodes d'oscillation au chronomètre. En déduire T_0 .
- Pour chaque mesure, calculer $k = m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$.
- Calculer \bar{k} et $u(\bar{k}) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$

```
m=np.array([50,100,150,200])*1e-3 #kg
T0=np.array([31.72/50,44.35/50,32.31/30,36.69/30]) #s
```

```
k=m*(2*np.pi/T0)**2
kmoy=np.mean(k)
ukmoy=np.std(k,ddof=1)/np.sqrt(len(k))
```

On obtient $\bar{k} = 5,077 \text{ N/m}$ avec $u(\bar{k}) = 0,079 \text{ N/m}$

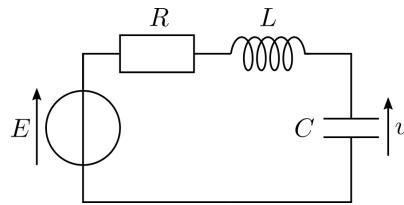
Conclusion

On calcule l'écart normalisé : $E_N = \frac{|k_1 - k_2|}{\sqrt{u(k_1)^2 + u(k_2)^2}} = 0,21$.
 $E_N < 2$ donc les mesures sont compatibles.

Régime transitoire d'un circuit RLC

1 Étude théorique

On étudie le circuit suivant.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u et la mettre sous la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

où m est le facteur d'amortissement.

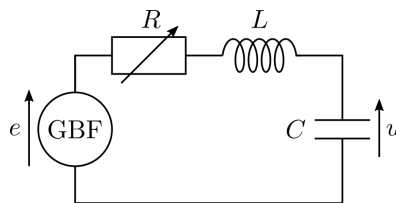
2. Déterminer la forme générale des solutions, dans le régime $m < 1$. On introduira la pseudo-pulsation ω_1 , dont on donnera l'expression en fonction de ω_0 et m .
3. Le décrément logarithmique δ du signal est défini par

$$\delta = \ln \left[\frac{u(t) - u_\infty}{u(t + T_1) - u_\infty} \right]$$

où T_1 est la pseudo-période. Établir l'expression de m en fonction de δ .

2 Observation à l'oscilloscope

On considère le montage ci-dessous. Le GBF délivre un signal carré d'amplitude 4 V et de fréquence 100 Hz et on choisit $C = 0,1 \mu\text{F}$.



4. Sur un schéma, indiquer comment brancher l'oscilloscope pour visualiser la tension e aux bornes du GBF sur la voie 1 et la tension u aux bornes du condensateur sur la voie 2.
5. Faire varier la valeur de la résistance pour observer les régimes apériodique et pseudo-périodique. Estimer la valeur R_c de R correspondant au régime critique. En déduire une estimation de L .

On choisit désormais $R = 100 \Omega$.

6. En utilisant les curseurs de l'oscilloscope, mesurer la pseudo-fréquence f_1 du signal.
7. En utilisant les curseurs de l'oscilloscope, mesurer le décrément logarithmique δ du signal. En déduire la valeur du coefficient d'amortissement m .

3 Acquisition numérique du signal

8. En utilisant la carte d'acquisition et le logiciel *LatisPro*, acquérir la tension u aux bornes du condensateur pour des valeurs de R allant de 100Ω à 10Ω . On paramétera l'acquisition pour acquérir 1000 points sur une durée totale d'une période (du signal GBF).

Pour chaque valeur de R , modéliser la réponse à un échelon par la fonction appropriée et relever les valeurs de la fréquence propre f_0 et du facteur d'amortissement m .

9. En utilisant python, tracer le graphe de R en fonction de m .

Modéliser la courbe obtenue par une droite.

Interpréter la valeur de l'ordonnée à l'origine.

Déduire du coefficient directeur une mesure de l'inductance L de la bobine.

10. En exploitant les mesures de la fréquence propre f_0 , déterminer une autre mesure de L , ainsi que l'incertitude-type $u(L)$ sur cette mesure. Conclure.

Régime transitoire d'un circuit RLC - Correction

1. Loi des mailles : $E - Ri - L \frac{di}{dt} - u = 0$, avec $i = C \frac{du}{dt}$, donc $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$

$$\text{On identifie } \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ 2m\omega_0 = \frac{R}{L} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

2. L'équation caractéristique de l'équation homogène est : $r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

Le discriminant vaut $\Delta = 4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$

$m < 1$ donc $\Delta < 0$, il s'agit du régime pseudo-périodique.

Les solutions de l'équation caractéristique sont : $r = -m\omega_0 \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -m\omega_0 \pm i\omega_0 \sqrt{1 - m^2}$

On identifie la pseudo-pulsation : $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$.

Les solutions de l'équation homogène sont : $u_h(t) = e^{-m\omega_0 t} [A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)]$

Une solution particulière constante de l'équation avec second membre est : $u_p = E$

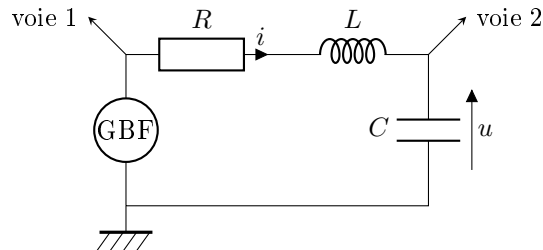
Ainsi, $u(t) = E + e^{-m\omega_0 t} [A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)]$

3. $u_\infty = E$ et $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. La partie sinusoïdale de $u(t)$ est T_1 périodique, donc

$$\frac{u(t) - u_\infty}{u(t + T_1) - u_\infty} = \frac{e^{-m\omega_0 t}}{e^{-m\omega_0(t+T_1)}} = e^{m\omega_0 T_1} = e^{\frac{2\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} \text{ d'où, } \delta = \frac{2\pi m}{\sqrt{1-m^2}}$$

$$\text{Donc } 1 - m^2 = \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 m^2, \text{ d'où } m = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 + 1}}$$

4.



5. Expérimentalement, on estime que le régime critique est obtenu pour $R_c = 1200 \Omega$.

Le régime critique correspond à $\Delta = 0$, c'est-à-dire $m = 1$, d'où $\frac{R_c}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 1$, soit $L = \frac{CR_c^2}{4} = 36 \text{ mH}$

6. On mesure $T_1 = 430 \mu\text{s}$, $f_1 = \frac{1}{T_1} = 2,33 \text{ kHz}$.

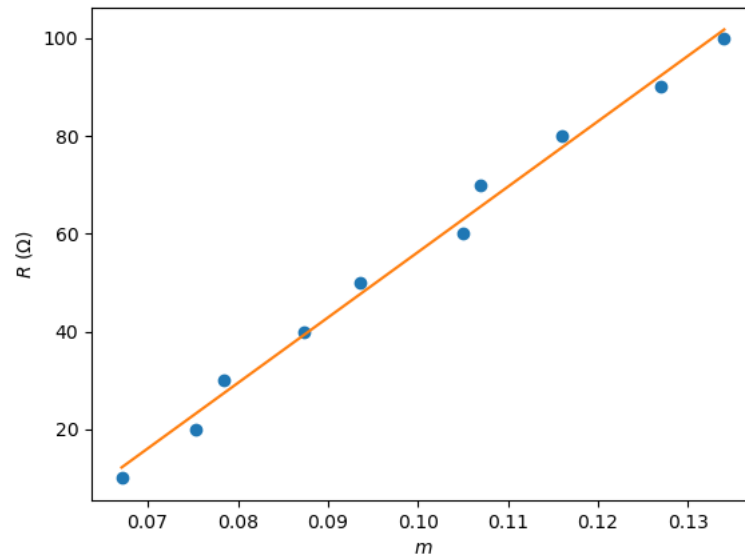
7. On mesure $u(t) - u_\infty = 5,44 \text{ V}$ et $u(t + T_1) - u_\infty = 2,40 \text{ V}$, d'où $\delta = 0,818$.

On en déduit $m = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 + 1}} = 0,129$

8. `import numpy as np`
`import matplotlib.pyplot as plt`

```
R=np.arange(10,110,10) # fonction range de numpy
f0=np.array([2342,2350,2344,2362,2353,2344,2344,2347,2326,2339]) #Hz
m=1e-3*np.array([67.098,75.28,78.49,87.34,93.60,105,107,116,127,134])
```

9. `plt.plot(m,R,'o')`
`a,b=np.polyfit(m,R,1)`
`plt.plot(m,a*m+b)`
`plt.show()`



La résistance totale du circuit est $R_{\text{tot}} = R + R_{\text{GBF}} + r_{\text{bobine}}$.

$m = \frac{R_{\text{tot}}}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$, donc $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}m - R_{\text{GBF}} - r_{\text{bobine}}$.

On identifie le coefficient directeur $a = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1339 \Omega$ et l'ordonnée à l'origine $b = -R_{\text{GBF}} - r_{\text{bobine}} = -77,65 \Omega$.

On en déduit $L = \frac{Ca^2}{4} = 44,81 \text{ mH}$ et $R_{\text{GBF}} + r_{\text{bobine}} = 77,65 \Omega$

```
10. f0moy=np.mean(f0)
    uf0moy=np.std(f0,ddof=1)/sqrt(len(f0))
```

On obtient $\bar{f}_0 = 2345,1 \text{ Hz}$ et $u(\bar{f}_0) = 3,0 \text{ Hz}$ par une évaluation de type A.

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ d'où $L = \frac{1}{C(2\pi f_0)^2}$.

Le condensateur indique une précision de 1,5%, donc $u(C) = \frac{1,5\%C}{\sqrt{3}}$ d'où $\frac{u(C)}{C} = 8,7 \times 10^{-3}$.

L'incertitude relative sur \bar{f}_0 vaut $\frac{u(\bar{f}_0)}{\bar{f}_0} = 1,2 \times 10^{-3}$

Par propagation des incertitudes, on a $\left[\frac{u(L)}{L}\right]^2 = \left[\frac{u(C)}{C}\right]^2 + 2\left[\frac{u(\bar{f}_0)}{\bar{f}_0}\right]^2$, d'où $u(L) = L\sqrt{\left[\frac{u(C)}{C}\right]^2 + 2\left[\frac{u(\bar{f}_0)}{\bar{f}_0}\right]^2}$

On peut aussi propager l'incertitude par simulation Monte-Carlo.

```
C=1e-7
DeltaC=1.5/100*C
```

```
N=10**4
f0MC=rd.normal(f0moy,uf0moy,N)
CMC=rd.uniform(C-DeltaC,C+DeltaC,N)
LMC=1/CMC/(2*pi*f0MC)**2
uL=np.std(LMC)
```

Finalement, le résultat de la mesure est $L = 46,059 \text{ mH}$ avec $u(L) = 0,42 \text{ mH}$.

On calcule l'écart normalisé avec la valeur obtenue avec m , bien qu'on ne dispose pas d'incertitude sur cette valeur : $E_N = \frac{|L_1 - L_2|}{u(L_2)} = 3,0$.

$E_N > 2$ mais on ne peut pas conclure car on n'a pas pris $u(L_1)$ en compte