Pendule simple amorti

1 Étude théorique

On étudie un pendule simple constitué d'une boule métallique de masse m et de volume V, suspendue à un fil de longueur ℓ. Le pendule est plongé dans l'eau de masse volumique ρ_e.
On modélise l'action de l'eau sur la bille par la poussée d'Archimède et une force de frottement de la forme : $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$, où R est le rayon de la boule et η la viscosité dynamique de l'eau.
On note θ l'angle du pendule avec la verticale.

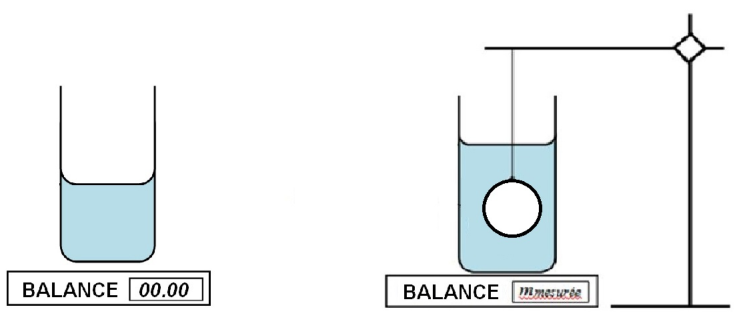
1. Établir l'équation du mouvement vérifiée par l'angle $\theta(t)$ dans la limite des petits angles. La mettre sous la forme canonique
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\theta = 0$$
Exprimer la pulsation propre ω_0 en fonction de g, ℓ, ρ_e, V et m, et le facteur d'amortissement ζ en fonction de ω_0, η, R et m.

2 Pointage vidéo du mouvement

2. Réaliser une vidéo d'une dizaine d'oscillations du pendule, puis un pointage automatique des positions de la boule, à l'aide de la fiche méthode. En utilisant le logiciel *Latis-Pro*, modéliser le graphe de $x(t)$ par la fonction appropriée. Relever les valeurs de la fréquence propre f_0 et du facteur d'amortissement ζ (noté m dans *Latis-Pro*).

3 Mesure du volume de la boule

Pour mesurer le volume V de la boule, on réalise le montage suivant.



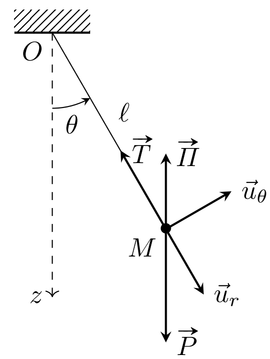
3. En considérant le système {récipient + eau}, montrer que la masse mesurée vaut $m_{\text{mesurée}} = \rho_e V$.
4. Mesurer V. En déduire R.

4 Détermination de ℓ et η

5. Déduire de f_0 une mesure de la longueur ℓ du fil.
6. Déduire de ζ une mesure de la viscosité dynamique de l'eau η.
7. Mesurer la longueur ℓ du fil à la règle.
8. La viscosité dynamique de l'eau est de 10^{-3} Pa.s à 20°C. Conclure quant à la validité de l'expression de la force de frottement.

Pendule simple amorti - Correction

1 Étude théorique



1. Repérage : $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}_r$, d'où $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r$
   La boule est soumise à :
   — son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg[\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta]$
   — la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_r$
   — la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_e V\vec{g} = -\rho_e Vg[\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta]$
   — la force de frottement $\vec{f} = -6\pi\eta R\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
   Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{\Pi} + \vec{f}$,
   soit selon $\vec{u}_\theta$, $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) + \rho_e Vg\sin(\theta) - 6\pi\eta R\ell\dot{\theta}$.
   Ainsi, l'équation du mouvement est $\ddot{\theta} + \frac{6\pi\eta R}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}(1 - \frac{\rho_e V}{m})\sin(\theta) = 0$
   Dans la limite des petits angles, $\sin\theta \approx \theta$, d'où $\ddot{\theta} + \frac{6\pi\eta R}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}(1 - \frac{\rho_e V}{m})\theta = 0$
   On identifie $\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}(1 - \frac{\rho_e V}{m}) \\ 2\zeta\omega_0 = \frac{6\pi\eta R}{m} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}(1 - \frac{\rho_e V}{m})} \\ \zeta = \frac{3\pi\eta R}{m\omega_0} \end{cases}$

2 Pointage vidéo du mouvement

2. On obtient $f_0 = 0,783$ Hz et $\zeta = 0,016$.

3 Mesure du volume de la boule

3. Le système {récipient + eau} est soumis à
   — son poids $\vec{P}$
   — la réaction de la balance $\vec{R}$
   — la force de la boule sur l'eau, opposée à la force de l'eau sur la boule, d'après le principe d'action-réaction, donc $-\vec{\Pi}$
   D'après le principe d'inertie, $\vec{P} + \vec{R}_0 = \vec{0}$, lors de la tare et $\vec{P} + \vec{R} - \vec{\Pi} = \vec{0}$ avec la boule.
   La force mesurée par la balance est $\vec{R} - \vec{R}_0 = \vec{\Pi} = \rho_e V\vec{g}$ d'où $m_{\text{mesurée}} = \rho_e V$.
4. On mesure $\rho_e V = 14$ g, où $\rho_e = 1$ g/mL, avec une balance de précision $\Delta = 1$ g
   $u(\rho_e V) = \rho_e u(V) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$
   Ainsi, $V = 14$ mL avec $u(V) = 0,58$ mL
5. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ d'où $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 1,495$ cm
   Par composition des incertitudes, $\left[\frac{u(R)}{R}\right]^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{u(V)}{V}\right]^2$ d'où $u(R) = \frac{R}{\sqrt{3}}\frac{u(V)}{V} = 0,036$ cm

4 Détermination de ℓ et η

6. $\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 = \frac{g}{\ell}(1-\frac{\rho_e V}{m})$ donc $\ell = \frac{g}{(2\pi f_0)^2}(1-\frac{\rho_e V}{m}) = 40,46$ cm
7. $\zeta = \frac{3\pi\eta R}{m 2\pi f_0}$ donc $\eta = \frac{2 f_0 m\zeta}{3R} = 6,93\times 10^{-2}$ Pa.s
8.
```
from math import *
import numpy as np

f0=np.array([0.783,0.786,0.782]) #Hz
z=np.array([15.981e-3,16.299e-3,18.144e-3])

f0moy=np.mean(f0)
uf0moy=np.std(f0,ddof=1)/sqrt(len(f0))
zmoy=np.mean(z)
uzmoy=np.std(z,ddof=1)/sqrt(len(z))
```
9. On propage l'incertitude par simulation Monte-Carlo.
```
import numpy.random as rd

g=9.81 #m.s-2
rho_e=1e-3 #kg.m-3
V=14e-6 #m3
DeltaV=1e-6 #m3
uV=DeltaV/sqrt(3)
m=118e-3 #kg
Deltam=1e-3 #kg
R=(3/4/pi*V)**(1/3)
uR=R/sqrt(3)*uV/V

l=g/(2*pi*f0moy)**2*(1-rho_e*V/m)
eta=2*f0moy*m*zmoy/3/R

N=10**4
VMC=rd.uniform(V-DeltaV,V+DeltaV,N)
mMC=rd.uniform(m-Deltam,m+Deltam,N)
RMC=rd.normal(R,uR,N)
f0MC=rd.normal(f0moy,uf0moy,N)
zMC=rd.normal(zmoy,uzmoy,N)

lMC=g/(2*pi*f0MC)**2*(1-rho_e*VMC/mMC)
ul=np.std(lMC)

etaMC=2*f0MC*mMC*zMC/3/RMC
ueta=np.std(etaMC)
```
   Finalement, $\ell = 40,46$ cm avec $u(\ell) = 0,12$ cm et $\eta = 6,93\times 10^{-2}$ kg.m^{-1}.s^{-1} avec $u(\eta) = 0,33\times 10^{-2}$ kg.m^{-1}.s^{-1}
10. A la règle, on mesure $\ell = 33,7$ cm. La principale source d'incertitude est la difficulté à localiser précisément le centre de la boule, on estime $\Delta = 0,5$ cm d'où $u(\ell) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = 0,29$ cm.
    On obtient $E_N = 22$: les 2 mesures ne sont pas compatibles. Le modèle adopté, en particulier l'expression de la force de frottement, est invalidé.
11. La viscosité dynamique de l'eau est de 10^{-3} Pa.s à 20°C. La valeur mesurée est aberrante, ce qui confirme que le modèle n'est pas valable. En effet, les effets de bords de la cuve augmente largement les frottements.