Pendant les vacances.

1) SE REPOSER !
   Quelques suggestions pour organiser votre travail.
2) Un calcul par jour !
3) Revoir le cours. Les petits contrôles sont sur le site de la classe, les refaire peut être un bon moyen de revoir le cours.
4) Refaire des exercices qui ont posé problème sur les chapitres traités. "Un calcul par jour" peut être l'occasion de vous faire refaire des exercices déjà vus en TD/DM/DS sur un thème donné.
5) Passer du temps sur ce DM15, en plusieurs fois s'il le faut.
6) Travailler le TD applications linéaires. Seront corrigés les ex : 1,2,3,4,7,8,9,10,11,15,16,19,22.
7) BONNES VACANCES !

Exercice 1. Diagonalisation On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le but de cet exercice est de calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

1) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et λ un paramètre réel.
   Vérifier que l'équation (E_λ) $AX = \lambda X$ est équivalente au système
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (2-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (2-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (2-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right. .$$
   Résoudre alors cette équation (E_λ) en discutant en fonction de λ. On note $\mathcal{S}_\lambda$ l'ensemble solution.
   On pose pose λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 > \lambda_2$ les deux réels tels que le système admet une infinité de solutions.
2) Vérifier que $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$. Donner une base (X_1) de $\mathcal{S}_{\lambda_1}$ et (X_2, X_3) de $\mathcal{S}_{\lambda_2}$ où
$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ * \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}.$$
3) On pose la matrice P dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3. Sans calculer l'inverse de P, montrer qu'il existe une matrice diagonale D, que l'on déterminera tel que $AP = PD$.
4) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
5) Exprimer alors D, puis D^n à l'aide des matrices A et P.
6) En déduire le tableau matriciel de D^n.

Exercice 2 Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note Id l'application identité sur E.
Si f est un endomorphisme de E et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-1 \text{ compositions}}$.

Partie I - Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On définit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-y-z, x+y+z, -2x-2y-z) \end{array}$.

1) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2) On pose $g = f - \mathrm{Id}$. Déterminer $\mathrm{Im}\, g$ et $\mathrm{Ker}\, g$. Pour chacun d'entre eux on donnera une base et des équations. On note $F = \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

3) On pose $h = f^2 + f + \mathrm{Id}$.

   -a- Calculer $f^2(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   -b- Vérifier alors que:
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad h(x, y, z) = (2x - z, 0, -2x + z).$$

   -c- Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, h$. On pose $G = \mathrm{Ker}\, h = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id})$.

4) F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

5) Montrer que $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, h$. En déduire que $h \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ puis une relation simple vérifiée par f.

Partie II - Étude du cas général

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ un endomorphisme de E vérifiant $\varphi^3 = \mathrm{Id}$.
On pose $F = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{Id})$.

1) Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.

2) Soit $u \in E$. On pose: $u_1 = \frac{1}{3}\left(\varphi^2(u) + \varphi(u) + u\right)$ et $u_2 = \frac{1}{3}\left(-\varphi^2(u) - \varphi(u) + 2u\right)$.
Montrer que $u_1 \in F$, $u_2 \in G$.

3) Montrer alors que $F \oplus G = E$.

4) On pose $p = \dfrac{1}{3}\left(-\varphi^2 - \varphi + 2\,\mathrm{Id}\right)$.

   -a- Montrer que p est un projecteur de E.

   -b- Montrer que $\mathrm{Ker}\, p = F$ et $\mathrm{Im}\, p = G$. Retrouver alors le résultat de 3).

Partie III - Étude d'une équation différentielle

Cette partie est facultative

On cherche dans cette partie les solutions de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle: $(\mathcal{E})$ $y''' = y$.
On note dans cette partie E l'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \,/\, f''' = f\}$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$.

2) Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) = f'$.

   -a- Montrer que φ est un endomorphisme de E.

   -b- Vérifier que $\varphi^3 = \mathrm{Id}$.

3) On pose l'équation différentielle: $(\mathcal{E}_1)$ $y' - y = 0$.

   -a- Sans chercher à résoudre $(\mathcal{E}_1)$, montrer que toute solution de $(\mathcal{E}_1)$ est élément de E.

   -b- Résoudre $(\mathcal{E}_1)$.

   -c- En déduire une base de $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.

4) On pose l'équation différentielle: $(\mathcal{E}_2)$ $y'' + y' + y = 0$.

   -a- Sans chercher à résoudre $(\mathcal{E}_2)$, montrer que toute solution de $(\mathcal{E}_2)$ est élément de E.

   -b- Résoudre $(\mathcal{E}_2)$.

   -c- En déduire une base de $\mathrm{Ker}(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{Id})$.

5) À l'aide de la partie B, déterminer alors l'ensemble-solution de $(\mathcal{E})$.