Exercice 1 Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^3 x} - \dfrac{1}{\sin^3 x}$ en 0.

Exercice 2 On pose $f : x \mapsto (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui, le prolongement est-il dérivable? Placer alors la courbe par rapport à sa tangente.

Exercice 3 Montrer que le graphe de $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ possède une asymptote en $+\infty$, dont on déterminera une équation, ainsi que la position par rapport au graphe de f (au voisinage de $+\infty$).

Exercice 4 On définit la suite de Fibonacci par:

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

L'objectif du problème est d'établir des formules concernant cette suite à l'aide du calcul matriciel.
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer la matrice A^2 et vérifier que c'est une combinaison linéaire de A et I_2. **En déduire** que A est inversible, on exprimera son inverse à l'aide de A et I_2.

2) Sans chercher à calculer le terme général de F_n, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

3) Calcul de A^n:
   - -a- Résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.
     En déduire deux vecteurs $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ **dont la deuxième composante est** 1 ainsi que deux réels distincts $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$ tels que $AX_1 = \alpha X_1$ et $AX_2 = \beta X_2$. On exprimera X_1 et X_2 de façon simple à l'aide de α et β.
   - -b- On note P la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de colonnes X_1 et X_2.
     Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. On exprimera P^{-1} de façon simple à l'aide de α et β.
   - -c- Déterminer SANS CALCUL une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour laquelle $AP = PD$.
   - -d- En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de A^n en fonction de n, P et D.
   - -e- En déduire la matrice A^n en fonction de n (pour les calculs, utiliser les lettres α et β sans les remplacer par leurs valeurs, on remarquera que le produit $\alpha\beta$ est simple).

4) Donner alors l'expression de F_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette expression est-elle valable si $n = 0$?
   Dans tout ce qui suit on n'utilisera jamais l'expression de F_n trouvée en 4) et on ne cherchera pas à prouver les formules attendues par récurrence.

5) -a- Etablir que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,
   $F_{n+p} = F_n F_{p+1} + F_{n-1} F_p$ (on traitera à part le cas $p = 0$).
   - -b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_{2n+1} s'écrit comme la somme de deux carrés d'entiers.

6) En utilisant la question 2), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.

7) -a- En utilisant une factorisation de $I_2 - A^{n+1}$ et la question 1), donner une expression simple de la matrice $I_2 + A + A^2 + \cdots + A^n$.
   - -b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k$.