Lundi 26 : $DL_6(0)$ de $\mathrm{th}\,x$

th est impaire, on détermine le $DL_5(0)$ de th :

$$\mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

On utilise : $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + o(u^5)$

(l'ordre 2 suffit dans le contexte)

$$\mathrm{th}\,x = \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5)\right)$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right)$$

$$= x + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5)$$

$$\boxed{\mathrm{th}\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)}$$

Mardi 27 : $y'' - 3y' + 2y = e^x + \sin x$ (E)

- Résolution de l'équation homogène : $y'' - 3y' + 2y = 0$ (E_0)

  On pose $(e) : r^2 - 3r + 2 = 0$

  $(e) \iff r = 1$ ou $r = 2$

  Donc $\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} \;/\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

- On pose $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = e^x$

  1 est solution de (e) on pose donc $y_p : x \longmapsto \alpha x e^x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

  Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l|r} y_p(x) = \alpha x e^x & 2 \\ y_p'(x) = \alpha e^x (x+1) & -3 \\ y_p''(x) = \alpha e^x (x+2) & 1 \end{array} \right.$

  y_p solution de $(E_1) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha e^x \left[2x - 3(x+1) + x + 2 \right] = e^x$

  $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -\alpha e^x = e^x$

  $\iff \alpha = -1$

  Donc : $y_p : x \longmapsto -x e^x$ est solution particulière de (E_1)

- On pose $(E_2) : y'' - 3y' + 2y = \sin x$

  $(E_2') : y'' - 3y' + 2y = e^{ix}$

  On pose $z_p : x \longmapsto \alpha e^{ix}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$

  Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l|r} z_p(x) = \alpha e^{ix} & 2 \\ z_p'(x) = \alpha i e^{ix} & -3 \\ z_p''(x) = -\alpha e^{ix} & 1 \end{array} \right.$

Mercredi 28 : équivalent simple de $f(x) = x^x - (\sin x)^{\sin x}$ en 0

$$f(x) = e^{x\ln x} - e^{\sin x \ln(\sin x)}$$

$$= e^{x\ln x} - e^{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \ln x\right)}$$

$$= e^{x\ln x} - e^{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) + \ln x\right)}$$

$$= e^{x\ln x} - e^{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^3) + \ln x\right)}$$

$$= e^{x\ln x} - e^{x\ln x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6}\ln x + o(x^3) + o(x^3\ln x)}$$

Or $x^3 = o(x^3\ln x)$ car $\frac{x^3}{x^3\ln x} = \frac{1}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0$

donc aussi $o(x^3) = o(x^3\ln x)$

D'où

$$f(x) = e^{x\ln x} - e^{x\ln x - \frac{x^3}{6}\ln x + o(x^3\ln x)}$$

$$= e^{x\ln x}\left(1 - e^{-\frac{x^3}{6}\ln x + o(x^3\ln x)}\right)$$

$$= e^{x\ln x}\left(1 - \left(1 - \frac{x^3}{6}\ln x + o(x^3\ln x)\right)\right) \qquad e^u = 1 + u + o(u)$$

Or $e^{x\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ car $x\ln x \to 0$ (CC)

donc $e^{x\ln x} \sim 1$

Donc : $\boxed{f(x) \sim \frac{x^3}{6}\ln x}$

z_p solution de (E_2') $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha e^{ix}(1-3i) = e^{ix}$

$$\iff \alpha = \frac{1}{1-3i} = \frac{1}{10}(1+3i)$$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im}(z_p(x)) = \dfrac{1}{10}\,\mathrm{Im}\left[(1+3i)\,e^{ix}\right]$

$$= \frac{1}{10}\,\mathrm{Im}\left[(1+3i)(\cos x + i \sin x)\right]$$

$$\mathrm{Im}(z_p(x)) = \frac{1}{10}(3\cos x + \sin x)$$

Donc : $x \longmapsto \dfrac{1}{10}(3\cos x + \sin x)$ est solution particulière de (E_2)

Conclusion $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x} - x e^{x} + \frac{1}{10}(3\cos x + \sin x) \;/\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$

Jeudi 29 : calcul de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \operatorname{Re}\left(e^{i\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ix} \left(e^{i\pi}\right)^k \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^k\right]$$

$$= \operatorname{Re}\left[e^{ix} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{\frac{3i\pi}{2}}\right)^k\right] \qquad \left(e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left[e^{ix} (1-i)^n\right]$$

$$= \operatorname{Re}\left[(\sqrt{2})^n e^{i\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)}\right] \qquad 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

$$\boxed{S_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(x - n\frac{\pi}{4}\right)}$$

Remarque : on peut aussi calculer cette somme en dérivant de deux manières $f(x) = e^{-x}\cos x$ et en égalant les deux résultats.

Vendredi 1er Mars $DL_3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $f(x) = \mathrm{Arctan}(2\sin x)$

NB : il est préférable de calculer ce DL grâce à la formule de Taylor-Young, plutôt que via les opérations sur les DL pour le calcul de $f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)$ car $2\sin x \underset{x \to \frac{\pi}{3}}{\not\to} 0$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et car Arctan et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc f admet un DL à tout ordre au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ en particulier à l'ordre 3,

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + f''\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} + f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{6} + \underset{\frac{\pi}{3}}{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right)$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2\cos x}{1+4\sin^2 x} \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1+4\,\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin x\,(1+4\sin^2 x) - 2\cos x \times 8\sin x\cos x}{(1+4\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{-2\sin x - 8\sin^3 x - 16\sin x\,(1-\sin^2 x)}{(1+4\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{-18\sin x + 8\sin^3 x}{(1+4\sin^2 x)^2}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-18\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{(1+3)^2} = \frac{-6\sqrt{3}}{16} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$f'''(x) = \frac{(-18\cos x + 24\sin^2 x\cos x)(1+4\sin^2 x)^2 + (18\sin x - 8\sin^3 x)\,2(1+4\sin^2 x)\,8\cos x\sin x}{(1+4\sin^2 x)^4}$$

$$= \frac{(-18\cos x + 24\sin^2 x\cos x)(1+4\sin^2 x) + (18\sin x - 8\sin^3 x)\times 16\cos x\sin x}{(1+4\sin^2 x)^3}$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\left(-18 \times \frac{1}{2} + 24 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right)(1+3) + \left(18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right) \times 16 \, \frac{\sqrt{3}}{2} \, \frac{1}{2}}{(1+3)^3}$$

$$= \frac{0 \times 4 + 6\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}}{64}$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{8}$$

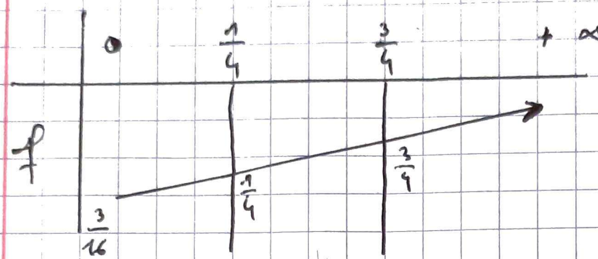
Conclusion:

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{3}{16}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)}$$

Samedi 2 Mars : étude de $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$ $\quad u_0 > 0$

On pose $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ où $x \in \mathbb{R}_+$.

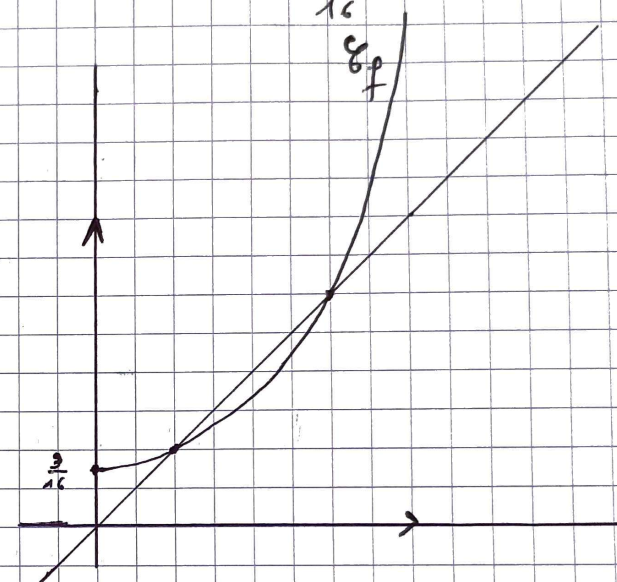
$\mathbb{R}_+$ stable par f donc $\boxed{u \text{ est définie à valeurs dans } \mathbb{R}_+}$



$f(x) - x = x^2 - x + \frac{3}{16}$

$= \frac{1}{16}(4x-1)(4x-3)$

x	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f(x)-x$		+	0	−	0	+	



Deux points fixes : $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$

- Si $u_0 = \frac{1}{4}$ alors u est constante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{4}$
- Si $u_0 = \frac{3}{4}$ ——— ——— : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{4}$
- Si $u_0 \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$, comme $\left]0, \frac{1}{4}\right[$ est stable

u est à valeurs ds $\left]0, \frac{1}{4}\right[$ (récurrence immédiate)

Donc u est croissante (d'après le signe de $f(x) - x$)

de plus u est majorée par $\frac{1}{4}$ donc d'après le théorème de la limite monotone u est convergente de limite $\ell \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$

Comme $\ell = \frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ alors $\ell = \frac{1}{4}$.

- Si $u_0 \in \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$, comme $\left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$ est stable par f alors

u est à valeurs ds $\left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$. Donc u est décroissante,

donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4} < u_n \leq u_0 < \frac{3}{4}$.

Comme de plus u est minorée alors d'après le TLM, u converge vers l qui vérifie après passage à la limite de (*) : $\frac{1}{4} \leq l \leq u_0 < \frac{3}{4}$ Donc $l = \frac{1}{4}$.

- Si $u_0 \in]\frac{3}{4}, +\infty[$, comme $]\frac{3}{4}, +\infty[$ est stable par f, Alors u est à valeurs ds $]\frac{3}{4}, +\infty[$, donc u est croissante.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \geq u_0 > \frac{3}{4}$ (*)

D'après le TLM, u converge ou $u_n \to +\infty$.

Par l'absurde supposons que u converge vers $l \in \mathbb{R}$ par passage à la limite de (*)

$$l \geq u_0 > \frac{3}{4}.$$ Ce qui est absurde.

Donc : $u_n \to +\infty$.

Bilan:

- si $u_0 \in]0, \frac{3}{4}[$, $u_n \to \frac{1}{4}$
- si $u_0 = \frac{3}{4}$, $u_n \to \frac{3}{4}$ (u constante)
- si $u_0 \in]\frac{3}{4}, +\infty[$, $u_n \to +\infty$