Lundi 4 :

$$(S)\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 & L_2 \leftarrow (L_2-2L_1)\frac{1}{7} \\ 2x+3y-5z=7 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ x+8y-7z=a & L_4 \leftarrow 2L_4-L_1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ -y+z=-1 \\ -2y+3z=-1 & L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \\ 11y-6z=2a-8 & L_4 \leftarrow L_4+11L_2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ -y+z=-1 \\ z=1 \\ 5z=2a-19 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \\ 0=a-12 \end{cases}$$

- Si $a \neq 12$, $\mathcal{S}_{(S)} = \emptyset$
- Si $a = 12$, $\mathcal{S}_{(S)} = \{(3,2,1)\}$

Mardi 5 : $(1-x^2)y' + (1+x^2)y = e^x$ sur $]0,1[$ (E)

$(E) \iff y' + \frac{1+x^2}{1-x^2}y = \frac{e^x}{1-x^2}$

- On pose $(E_0) : y' + \frac{1+x^2}{1-x^2}y = 0$

Posons $a : x \longmapsto \frac{1+x^2}{1-x^2}$

Pour $x \in]0,1[$, $a(x) = \frac{-(1-x^2)+2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$

Une primitive de a est $A : x \longmapsto -x + \ln|1+x| - \ln|1-x|$
$= -x + \ln(1+x) - \ln(1-x)$

Donc $\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{x} \frac{1-x}{1+x} \;/\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

- On pose $y_p : x \longmapsto \lambda(x) e^x \frac{1-x}{1+x}$ où λ dérivable sur $]0,1[$,

Pour $x \in]0,1[$, $\begin{cases} y_p(x) = \lambda(x) e^x \frac{1-x}{1+x} \\ y_p'(x) = \lambda'(x) e^x \frac{1-x}{1+x} + \lambda(x)\left[e^x \frac{1-x}{1+x} - e^x \frac{2}{(1+x)^2} \right] \end{cases}$

Donc

y_p solution de (E) $\iff \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x) e^x \frac{1-x}{1+x} = \frac{e^x}{1-x^2}$

$\iff \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

On pose $\lambda : x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ donc $y_p : x \longmapsto \frac{e^x}{1+x}$

- Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{rcl}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda e^x \frac{1-x}{1+x} + \frac{e^x}{1+x} \end{array} \;\Big/\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Mercredi 6 Mars : Etude locale de $f(x) = \dfrac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}$

Rem : $x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

La partie régulière est de valuation 2 on anticipe alors la simplification par x^2, on part donc de $DL_3(0)$ pour le dénominateur et le numérateur.

Pour x au $V(0)$:

$$f(x) = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - x}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

$$= \frac{x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

$$= 2\,\frac{1 + \frac{x}{6} + o(x)}{1 - \frac{2x}{3} + o(x)}$$

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$

$$= 2\left(1 + \frac{x}{6} + o(x)\right)\left(1 + \frac{2x}{3} + o(x)\right)$$

$$= 2\left[1 + x\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)\right] + o(x)$$

$$\boxed{f(x) = 2 + \frac{5}{3}x + o(x)}$$

f admet un $DL_1(0)$, donc un $DL_0(0)$, et donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$; et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = \frac{5}{3}$

L'équation de la tangente est : $y = 2 + \frac{5}{3}x$.

Rem : le $DL(1)$ ne suffit pas à déterminer la position de la tangente.

Jeudi 7 Mars : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$

Posons (e) : $r^2 + 2r + 4 = 0$ $\qquad \Delta = -12 = (2i\sqrt{3})^2$

$$(e) \iff r = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$\iff r = 2\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\iff r = 2e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe alors } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que :}\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2^n\left(\lambda\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \mu\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)\end{array}}$$

Vendredi 8 Mars : étude asymptotique de de $f(x) = x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

Soit $x > 0$, on pose $h = \frac{1}{x}$, on a bien $h \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h^2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{h}}\right)$$

$$= \frac{1}{h^2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{h+1}\right)$$

Rem : on souhaite une précision $o(h)$, la division par h^2 invite à déterminer le $DL_3(0)$ de $\operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{h+1}\right)$

On a $\frac{h}{1+h} = h(1-h+h^2+o(h^2)) = h - h^2 + h^3 + o(h^3)$

et $\operatorname{Arctan}(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

Donc $f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h^2}\left[(h-h^2+h^3) - \frac{1}{3}(h-h^2+h^3)^3 + o(h^3)\right]$

$$= \frac{1}{h^2}\left(h - h^2 + \frac{2}{3}h^3 + o(h^3)\right)$$

$$= \frac{1}{h} - 1 + \frac{2}{3}h + o(h)$$

Donc : $\boxed{f(x) = x - 1 + \frac{2}{3}x + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)}$

Donc $\boxed{\Delta : y = x - 1 \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_f}$

et $f(x) - (x-1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}x > 0$

donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \Delta \text{ au voisinage de } +\infty}$

Samedi 9 Mars :

$$(S)\begin{cases} x+y+mz = a \\ x+y-z = b & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ x+my-mz = c & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+mz = a \\ -(m+1)z = b-a & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ (m-1)y-(m+1)z = c-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+mz = a \\ (m-1)y-(m+1)z = c-a \\ -(m+1)z = b-a \end{cases}$$

- Si $m=-1$,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z = a \\ -2y = c-a \\ \boxed{0 = b-a} \end{cases}$$; equation de compatibilité

$\longrightarrow$ Si $b \neq a$: $\boxed{\mathcal{S}_{(S)} = \emptyset}$

$\longrightarrow$ Si $b = a$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(c+a)+z \\ y = \frac{1}{2}(a-c) \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_{(S)} = \left\{ \left(\tfrac{1}{2}(a+c)+z, \tfrac{1}{2}(a-c), z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}}$$

(infinité de solutions)

- Si $m=1$

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z=a \\ -2z=c-a \\ -2z=b-a \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=a \\ -2z=c-a \\ \boxed{0=b-c} \end{cases}$$ équation de compatibilité

→ Si $b \neq c$: $\mathcal{S}_{(S)} = \emptyset$

→ Si $b=c$,

$$(S) \iff \begin{cases} x=\frac{1}{2}(a+c)-y \\ z=\frac{a-c}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_{(S)} = \left\{ \left(\frac{1}{2}(a+c)-y, y, \frac{1}{2}(a-c) \right) / y \in \mathbb{R} \right\}}.$$

(infinité de solutions)

- Sinon, $m \neq 1$ et $m \neq -1$: il y a existence et unicité de la solution

$$(S) \iff \begin{cases} x=a-\frac{1}{m-1}(c-b)-\frac{m}{m+1}(a-b) \\ y=\frac{1}{m-1}(c-b) \\ z=\frac{1}{m+1}(a-b) \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_{(S)} = \left\{ \left(\frac{1}{m+1}a+\frac{m^2+1}{m^2-1}b+\frac{1}{1-m}c, \frac{1}{m-1}(c-b), \frac{1}{m+1}(a-b) \right) \right\}}$$

(Unique solution)