

# DS n° 6 de Physique-Chimie

Durée : 4h  
Calculatrice autorisée

## 1 L'ammoniac

### 1.1 Structure

1. Établir le schéma de Lewis de l'ammoniac  $\text{NH}_3$ .
2. La molécule d'ammoniac est-elle polaire ? Si oui, représenter la direction et le sens de son moment dipolaire.

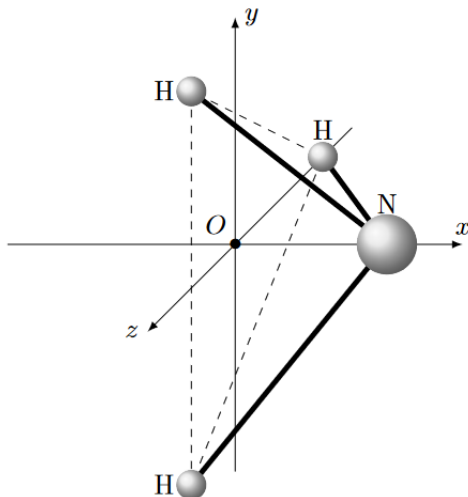
### 1.2 Propriétés acido-basiques

Données -  $\text{p}K_{\text{a}1}(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,8$  ,  $\text{p}K_{\text{a}2}(\text{NH}_4^+/\text{NH}_3) = 9,2$

3. Déterminer la concentration  $c_0$  d'une solution d'ammoniac de pH 11,1.
4. On mélange un même volume d'une solution d'acide acétique de concentration  $2c$  et d'une solution d'ammoniac de concentration  $4c$ . Calculer le pH du mélange.

### 1.3 Inversion de la molécule d'ammoniac

On étudie le mouvement de l'atome d'azote N, de masse  $m$ , dans le référentiel des 3 atomes d'hydrogène, supposé galiléen. Les 3 atomes d'hydrogène sont supposés fixes disposés aux sommets d'un triangle équilatéral de barycentre  $O$ . On note  $Oyz$  le plan formé par les 3 atomes d'hydrogènes et on suppose que l'atome N est astreint à se déplacer sur l'axe  $Ox$  orthogonal à ce plan.



On modélise la résultante des forces exercées par les atomes d'hydrogène sur N par une force de la forme :

$$\vec{F} = -bx(x^2 - a^2)\vec{u}_x$$

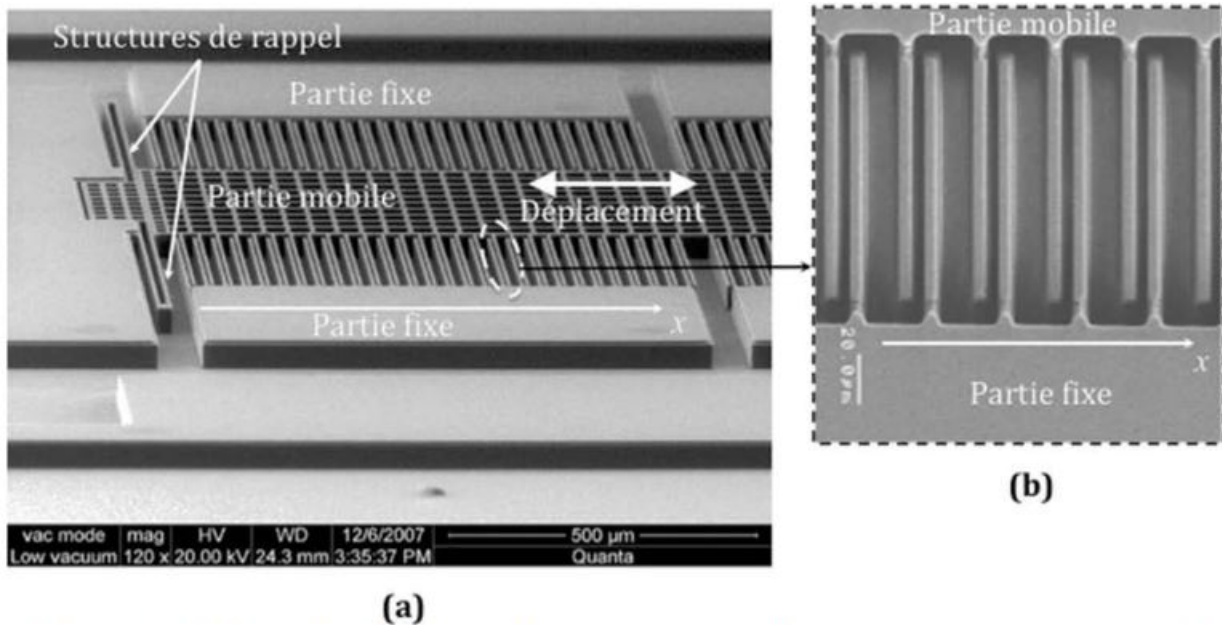
où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives. On néglige la pesanteur.

5. Montrer que la résultante des forces exercées par les atomes d'hydrogène est conservative et exprimer l'énergie potentielle  $E_p(x)$  associée. On prendra l'origine des énergies potentielles en  $x = 0$ .
6. Déterminer les positions d'équilibre et étudier leur stabilité.
7. Calculer  $E_p(\pm a)$ , et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} E_p(x)$ .
8. Tracer l'allure du graphe  $E_p(x)$ .
9. Exprimer  $E_{\text{inv}}$  l'énergie nécessaire pour inverser la molécule d'ammoniac (c'est-à-dire pour que N passe de l'autre côté du plan des atomes d'hydrogène), en fonction de  $a$  et  $b$ .
10. Décrire le mouvement de N selon la valeur de son énergie mécanique  $E_m$ . Représenter dans chaque cas l'allure du graphe  $x(t)$ . On fera apparaître  $a$  sur le graphe.
11. Établir l'expression de la période  $T_0$  des petites oscillations autour de la position  $x = a$ , en fonction de  $m$ ,  $a$  et  $b$ .
12. On donne  $E_{\text{inv}} = 0,25$  eV,  $a = 38,7$  pm et  $M_N = 14$  g/mol. Calculer la valeur de  $T_0$ .

## 2 Étude d'un accéléromètre

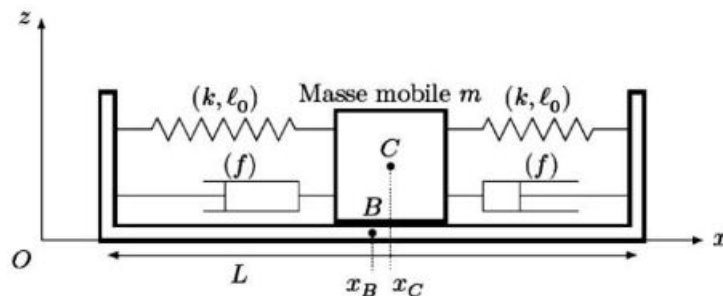
La miniaturisation, la fiabilité et le faible coût des accélérateurs à MEMS (Micro-Electro-Mechanicals- Systems) permettent de les intégrer dans de nombreux dispositifs électroniques. Ils sont par exemple présents dans les manettes de consoles de jeux vidéo ou dans les smartphones, où ils jouent un rôle important : orientation portrait/paysage, stabilisation photographique, etc.

Un exemple de structure interne d'un accéléromètre uniaxe est présenté sur la figure 1. L'image obtenue en microscopie électronique à balayage montre une structure en deux parties imbriquées : un boîtier rigide dans lequel peut se déplacer une masse mobile. Une accélération de l'ensemble provoque le déplacement de la masse mobile par rapport au boîtier. Chaque partie comporte un double peigne, et l'imbrication des dents forme un condensateur. Une mesure électrique de sa capacité permet de remonter à la valeur de l'accélération.



**Figure 1 :** (a) image d'un MEMS accéléromètre uniaxe réalisée en microscopie électronique à balayage, la direction du déplacement possible est symbolisée par une double flèche, (b) détail de l'imbrication des peignes des parties mobile et fixe lors d'une accélération. D'après G. Dai et al., *Sensors and Actuators A : Physical*, 172, (2011), 369– 378.

On modélise un accéléromètre par un système masse-ressorts amorti, dont le schéma de principe est représenté ci-dessous.



La masse mobile  $m$ , assimilée à un point matériel  $C$ , est astreinte à se déplacer selon l'axe horizontal  $Ox$ . Le boîtier rigide de l'accéléromètre, de longueur  $L$  selon l'axe  $Ox$ , de centre  $B$  se déplace dans le référentiel terrestre, supposé galiléen et on note  $\vec{a} = a\vec{u}_x$  son accélération. On note  $x_C$  la position de la masse mobile en mouvement,  $x_B$  la position du centre du boîtier et  $x = x_C - x_B$  la position de la masse mobile par rapport au point  $B$ , centre du boîtier. Lorsque le boîtier de l'accéléromètre est au repos, la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier vérifie  $x = 0$ . Lorsque le boîtier subit une accélération, la masse mobile quitte la position définie précédemment.

La masse mobile est soumise :

- aux forces de rappel  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  exercées par deux ressorts identiques, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  ;

- à des forces de frottement visqueux dont la résultante est proportionnelle à la vitesse relative de la masse mobile par rapport au boîtier :  $\vec{F}_f = -2f(\dot{x}_C - \dot{x}_B)\vec{u}_x$ , où  $f$  est le coefficient de frottement visqueux ;
- à son poids  $\vec{P}$  et à la réaction du boîtier  $\vec{R}$ .

## 2.1 Équation du mouvement

- Montrer que la résultante des forces de rappel exercées par les deux ressorts s'écrit  $\vec{T} = -2kx\vec{u}_x$ .
- Montrer que, lorsque le boîtier subit une accélération, l'équation différentielle vérifiée par l'élongation  $x$  s'écrit :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = -a$$

où  $\omega_0$  et  $Q$  deux constantes que l'on exprimera en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $f$ .

- Quelle sont les significations physiques de  $\omega_0$  et  $Q$  ?

## 2.2 Étude de la réponse harmonique

On étudie la réponse en élongation  $x$  du capteur, à une accélération sinusoïdale  $a(t) = A \cos(\omega t)$ . On note  $\underline{X} = X e^{i\varphi}$  l'amplitude complexe de  $x(t)$ .

- Pourquoi ne perd-t-on pas en généralité en considérant une excitation sinusoïdale ?
- Établir l'expression de la fonction de transfert

$$\underline{H}(iy) = \frac{\omega_0^2 \underline{X}}{A}$$

en fonction de  $y = \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $Q$ .

- Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de l'accéléromètre.
- Préciser le domaine fréquentiel d'utilisation de l'accéléromètre.
- Établir la condition de résonance sur  $Q$ , ainsi que l'expression de la pulsation de résonance  $\omega_r$ .
- La fréquence typique de résonance mécanique d'un accéléromètre à MEMS est de l'ordre de 1 kHz et son facteur de qualité est voisin de 5. Estimer la valeur numérique de l'amplitude finale du déplacement de la masse mobile pour une accélération constante de « 1g » (où  $g$  est l'accélération du champ de pesanteur).

## 3 Accordeur de guitare

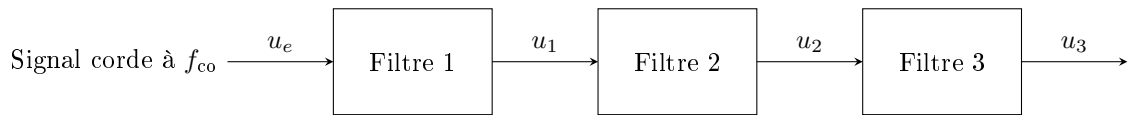
Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur électronique de guitare. La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées  $f_{ac}$  sont données dans le tableau suivant.

Corde	Fréquence $f_{ac}$ (Hz)
Mi grave	82,4
La	110,0
Ré	146,8
Sol	196
Si	246,9
Mi aigu	329,6

On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera  $f_{co}$  la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

L'accordeur fonctionne de la manière suivante :

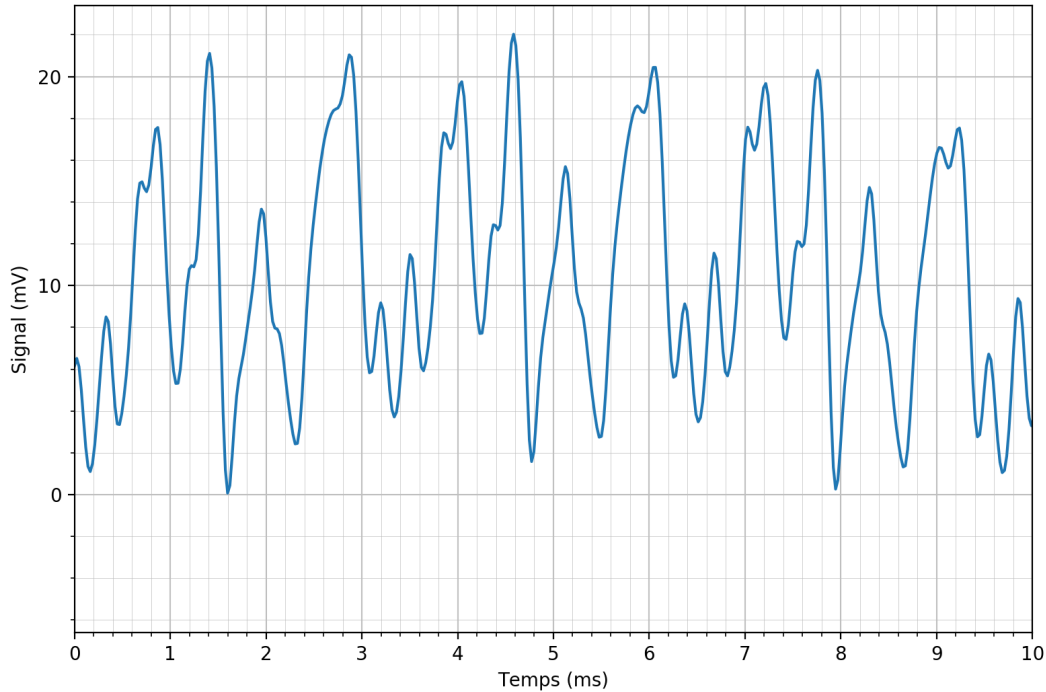
- Sélection de la corde à accorder (donc  $f_{ac}$  est fixée).
- Enregistrement du signal  $u_e(t)$  provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence  $f_{co}$ .
- Amplification et filtrage de ce signal par une série de trois filtres, pour extraire la fréquence  $f_{co}$ .



— Comparaison de la fréquence  $f_{co}$  avec la fréquence  $f_{ac}$  sélectionnée.

### 3.1 Le signal

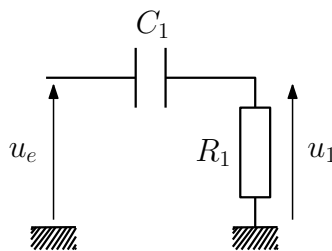
La figure suivante montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.



22. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
23. Donner une estimation de la valeur de la fréquence fondamentale de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
24. De quelle corde de guitare s'agit-il?
25. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques? Justifier.

### 3.2 Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre représenté ci-dessous.

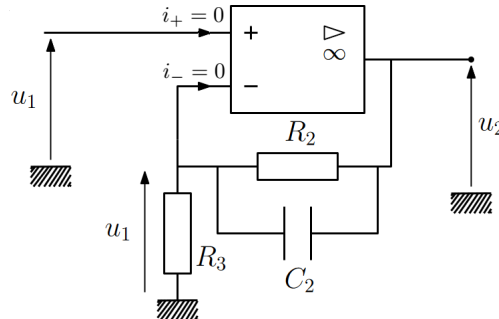


26. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert  $\underline{H}_1(j\omega)$  de ce filtre en fonction de  $R_1$ ,  $C_1$  et de la pulsation  $\omega$  du signal.
27. Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce filtre. De quel type de filtre s'agit-il?
28. Définir la pulsation de coupure  $\omega_1$  de ce filtre. Exprimer  $\omega_1$  en fonction de  $R_1$  et  $C_1$ .

29. Calculer la phase à la pulsation de coupure  $\varphi_1(\omega_1)$ .
30. On a choisi  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$  et  $C_1 = 100 \text{ nF}$ . Calculer la fréquence de coupure  $f_1$  de ce filtre. Au vu de l'allure du signal enregistré, quel est le rôle de ce premier filtre?

### 3.3 Deuxième filtre

On considère le filtre ci-dessous.



Dans cette configuration, le comportement de l'amplificateur linéaire intégré (ou amplificateur opérationnel) est le suivant :

- les bornes + et - sont au même potentiel  $V_+ = V_- = u_1$ .
  - les intensités  $i_+$  et  $i_-$  des courants entrant dans les bornes + et - sont nulles.
31. Que vaut l'impédance d'entrée de ce filtre? Expliquer l'intérêt de cette valeur.
32. Établir l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}_2(j\omega)$  de ce filtre, la mettre sous la forme

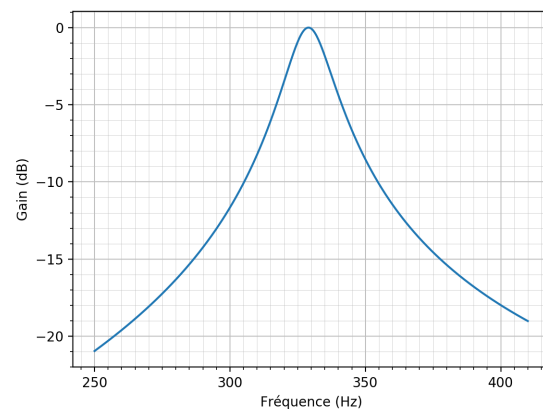
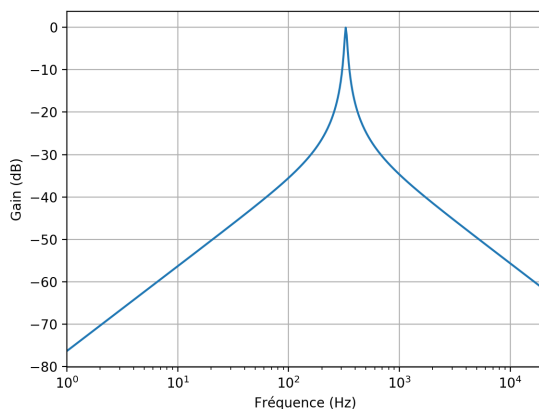
$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de  $G_0$  et  $\omega_2$  en fonction de  $R_2$ ,  $R_3$  et  $C_2$ .

33. Quelle est la limite de  $|\underline{H}_2|$  en basse fréquence? en haute fréquence?
34. Calculer numériquement la fréquence caractéristique  $f_2$  correspondant à  $\omega_2$  si  $R_2 = 680 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$  et  $C_2 = 470 \text{ pF}$ , ainsi que son gain  $G_0$ . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

### 3.4 Filtrage sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale  $f_{co}$  du signal  $u_2$ , dont la valeur est a priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur ( $f_{ac}$ ). La fréquence centrale du filtre 3 est réglée par un signal de référence de fréquence  $f_{ac}$ . La figure suivante représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre 3 tracé à deux échelles différentes.



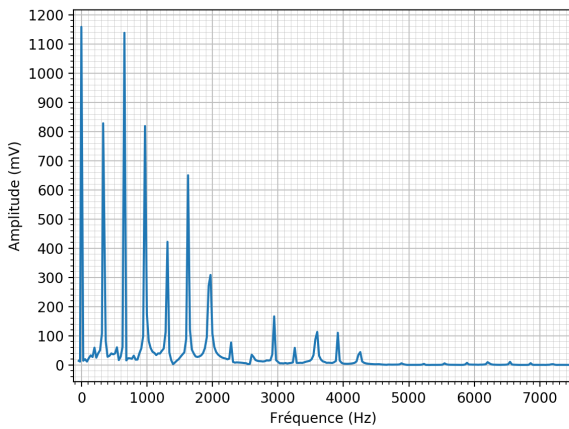
35. Si la corde est désaccordée à  $f_{co} = 315 \text{ Hz}$ , estimer de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.
36. Définir la bande passante du filtre et estimer sa largeur. En déduire le facteur qualité  $Q$  du filtre.

37. Proposer un montage comprenant une résistance  $R$ , une capacité  $C$  et une inductance  $L$  permettant de réaliser ce type de filtre. On indiquera bien la tension d'entrée  $u_2$  et la tension de sortie  $u_3$  sur le schéma. Établir la fonction de transfert du filtre proposé et la mettre sous sa forme canonique :

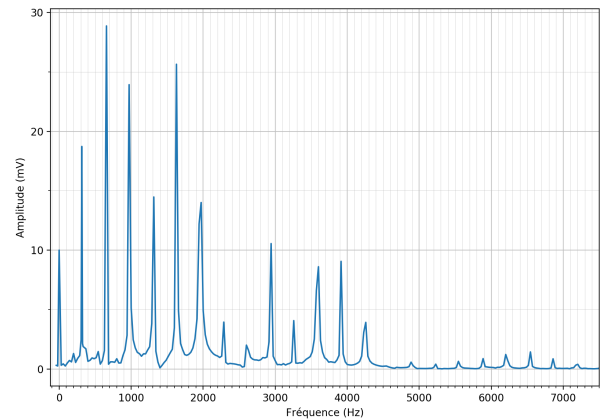
$$\underline{H}_3(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

en précisant les expressions de  $\omega_0$  et  $Q$ .

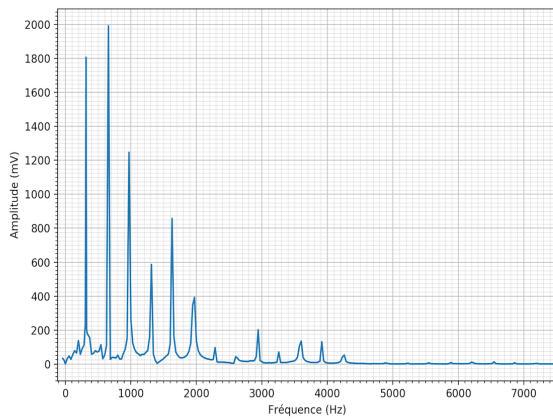
38. On dispose d'une bobine de 1 mH. Déterminer les valeurs de  $C$  et  $R$  nécessaires pour réaliser le filtre 3. Ces valeurs vous paraissent-elles réalistes ?
39. Identifier parmi les spectres ci-dessous celui du signal d'entrée  $u_e$ , celui du signal  $u_1$  en sortie du filtre 1 et celui du signal  $u_2$ . Justifier soigneusement.



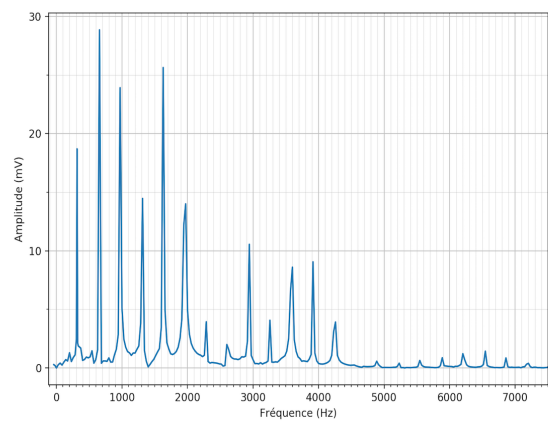
(a)



(b)



(c)



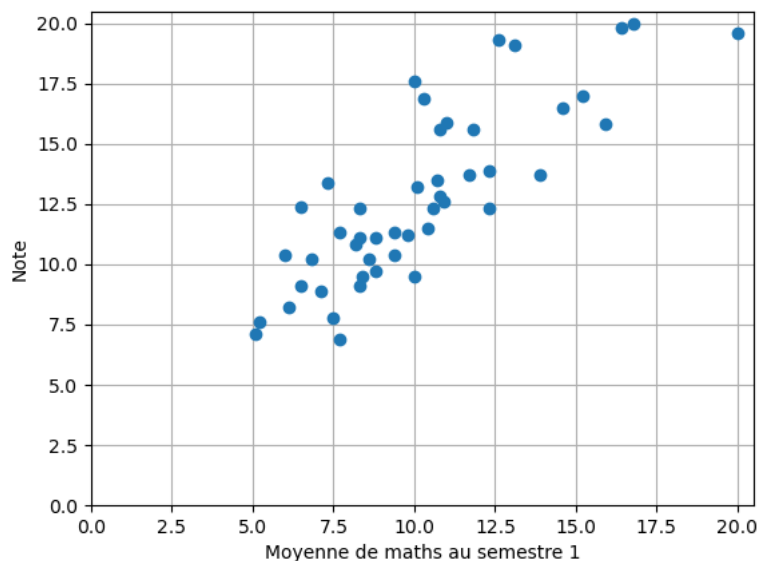
(d)

40. Tracer l'allure du spectre du signal  $u_3$  en sortie du filtre 3. Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

## Commentaires du DS n° 6 de Physique-Chimie

Moyenne : 12,7/20

Max : 20/20

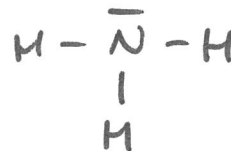


Évitez impérativement de mélanger ou de regrouper les questions. Une bonne réponse dans la mauvaise question ne rapporte pas de points!

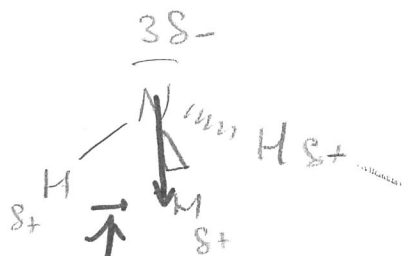
2. Pour prévoir la polarité de molécule, il est indispensable de déterminer sa géométrie.  
Le vecteur moment dipolaire  $\vec{p}$  est orienté du barycentre des charges  $\ominus$  vers le barycentre des charges  $\oplus$ .
4. Inutile de recalculer  $\frac{dE_p}{dx}$  lorsqu'on connaît déjà la force  $\vec{F}$ . Les positions d'équilibre sont directement données par  $\vec{F}(x_{eq}) = \vec{0}$ .
10. Pour discuter la nature bornée ou non du mouvement, il faut reporter la droite horizontale d'équation  $E = E_m$  sur le graphe  $E = E_p(x)$ . On peut ainsi remarquer que pour  $E_m < 0$  l'amplitude du mouvement est  $< a$ , donc  $x = 0$  n'est jamais atteint. Pour  $E_m > 0$  par contre l'amplitude du mouvement est  $> a$ .
14. Attention de bien identifier le système, la partie mobile assimilée au point matériel  $C$ , et le référentiel, terrestre. On ne peut pas appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du boîtier car celui-ci n'est pas galiléen. De plus, il n'y a pas de point  $M$  ici, le vecteur position est  $\vec{OC} = x_C \vec{u}_x$  avec  $x_C = x_B + x$ , d'où  $\vec{a}_C = \ddot{x}_C \vec{u}_x = (a + \ddot{x}) \vec{u}_x$ .
15. On demandait la signification physique de  $\omega_0$  et  $Q$ , pas simplement les noms.  $\omega_0$  n'est pas la pulsation propre du signal, mais du système. Rappelons qu'un oscillateur amorti n'oscille pas tout à fait à  $\omega_0$ , mais à  $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ .
16. Pour qu'on puisse déduire la réponse du système à un signal périodique, en utilisant sa décomposition en série de Fourier, il faut également que le système soit linéaire.
20. Ne pas confondre
  - la pulsation de résonance  $\omega_r$  pour laquelle  $G(\omega)$  admet un maximum,
  - les pulsations de coupure  $\omega_c$  pour lesquelles  $G(\omega_c) = \frac{G_{réf}}{\sqrt{2}}$
21. Le signal d'entrée est ici une accélération **constante**, donc de pulsation (ou fréquence) nulle  $\omega = 0$ .
23. Il faut lire la période sur le signal avec le maximum de précision que permet le graphe. Une valeur à 1 seul chiffre significatif n'est pas satisfaisante, ici.
28. En général, la pulsation de coupure n'est pas forcément la pulsation de l'intersection des asymptotes en gain. C'est le cas pour les filtres du 1er ordre, mais c'est en quelque sorte une coïncidence.
30. Ne pas confondre
  - la composante continue de pulsation  $\omega = 0$
  - et le fondamental de pulsation  $\omega = \omega_{signal}$  la pulsation du signal
36. La définition de la bande passante n'est pas l'intervalle  $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$ , mais l'ensemble des pulsations (ou fréquences) telles que  $G(\omega) \geq \frac{G_{réf}}{\sqrt{2}}$ .

1. L'ammoniac

1.  $N_v = 5 + 3 = 8$



2.  $\text{NH}_3$  a une géométrie pyramidale à base triangulaire  
N est plus électro-négatif que H.



$\text{NH}_3$  est polaire.

3.

État	$\text{NH}_3$	$+$	$\text{H}_2\text{O}$	$=$	$\text{NH}_4^+$	$+$	$\text{HO}^-$
i	$c_0$		excès		0		0
f	$c_0 - n$				$n$		$n$

$$K = \frac{[\text{NH}_4^+] \omega \times h}{[\text{NH}_3] \times h} = \frac{K_e}{K_{a2}} = 10^{-4,8}$$

$$\frac{n^2}{c_0 - n} = \frac{K_e}{K_{a2}} \quad \text{or} \quad n = \omega = \frac{K_e}{h} = 10^{-2,9}$$

donc  $c_0 = \frac{K_{a2} n^2}{K_e} + n$

$$c_0 = (10^{-1} + 10^{-2,9}) \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \approx 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$



4. Etat

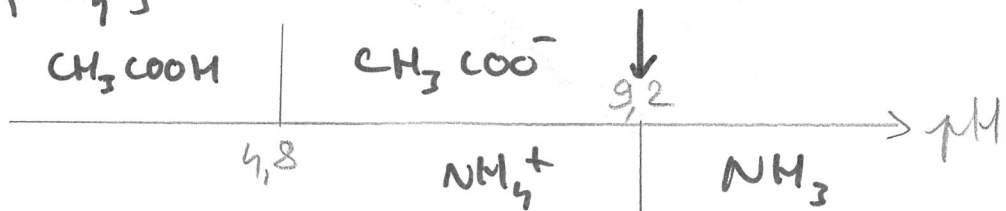
	$\text{CH}_3\text{COOH}$	$+$	$\text{NH}_3$	$=$	$\text{CH}_3\text{COO}^-$	$+$	$\text{NH}_4^+$
i	c		2c		0		0
f	c-n		2c-n		n		n

$$K = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-][\text{NH}_4^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}][\text{NH}_3]} \times h = \frac{K_{a1}}{K_{a2}} = 10^{5,4}$$

Hypothèse : la réaction est quasi-totale :  $n \simeq n_{\text{max}} \simeq c$

Alors  $[\text{NH}_3] \simeq c$  et  $[\text{NH}_4^+] \simeq c$

$$K_{a2} = \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} \simeq h \quad \text{d'où} \quad \boxed{\text{pH} = 9,2}$$



Le pH est loin du domaine du réactif limitant  $\text{CH}_3\text{COOH}$ , donc l'hypothèse est validée.

5. On cherche  $E_p$  telle que  $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$   
 $= bn(n^2 - a^2) dn$

$$\frac{dE_p}{dn} = bn^3 - ba^2n \quad \text{donc} \quad E_p(n) = \frac{b}{4}n^4 - \frac{ba^2}{2}n^2 + \text{cte}$$

$E_p(n)$  existe, donc  $\vec{F}$  est conservative.

On choisit  $E_p(0) = 0 = \text{cte}$ .

Ainsi, 
$$\boxed{E_p(n) = \frac{b}{2}n^2\left(\frac{n^2}{2} - a^2\right)}$$

6. On cherche  $n_{\text{eq}}$  tels que  $\vec{F}(n_{\text{eq}}) = 0$

$$-b n_{\text{eq}} (n_{\text{eq}}^2 - a^2) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad n_{\text{eq}} = 0 \quad \text{ou} \quad n_{\text{eq}} = \pm a$$

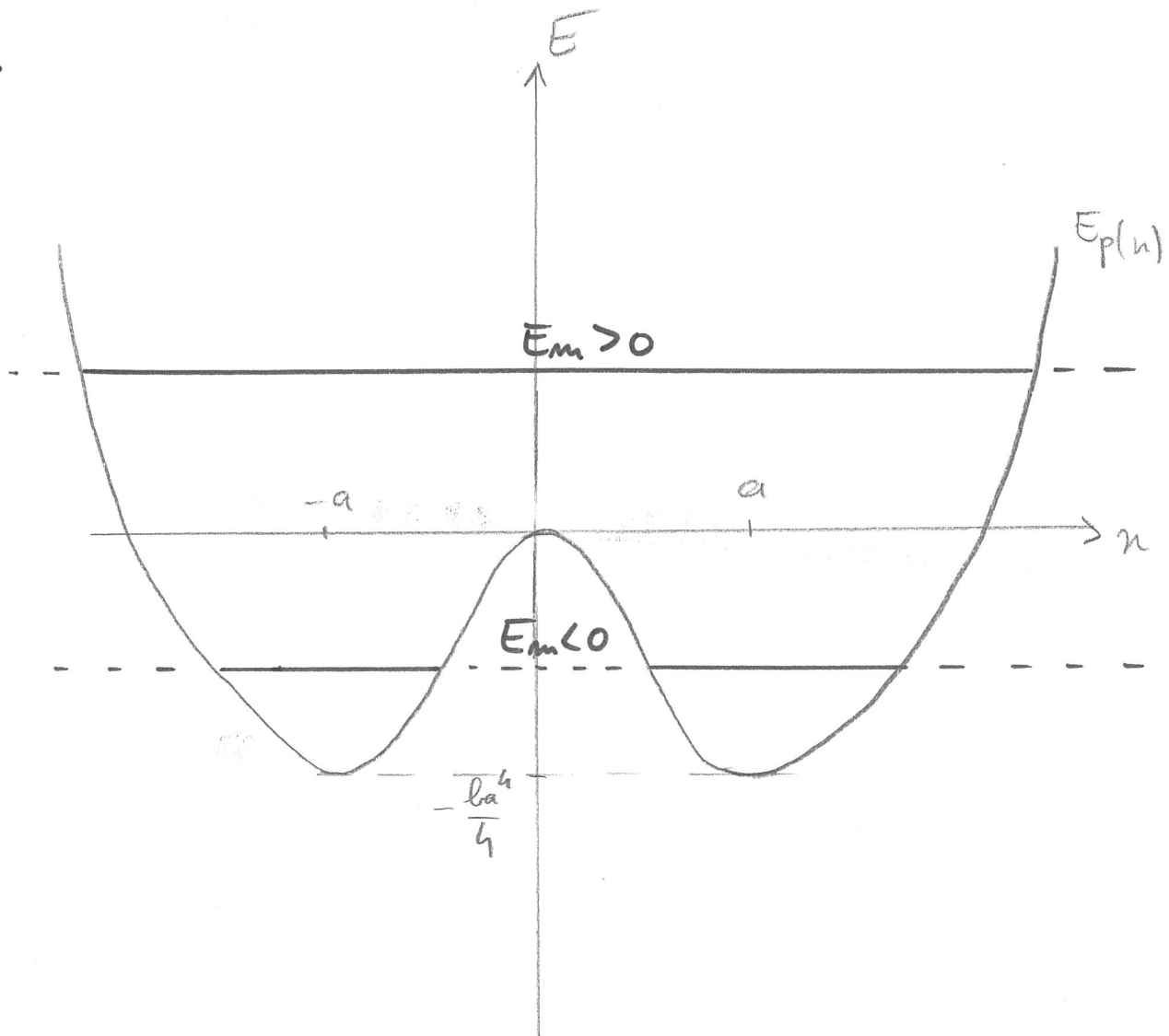
$$\frac{d^2 E_p}{dn^2} = -\frac{dF_n}{dn} = 3bn^2 - ba^2 = b(3n^2 - a^2)$$

$$\frac{d^2 E_p}{dn^2}(0) = -ba^2 < 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{n_{\text{eq}} = 0 \text{ position d'équilibre instable}}$$

$$\frac{d^2 E_p}{dn^2}(\pm a) = 2ba^2 > 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{n_{\text{eq}} = \pm a \text{ positions d'équilibre stables}}$$

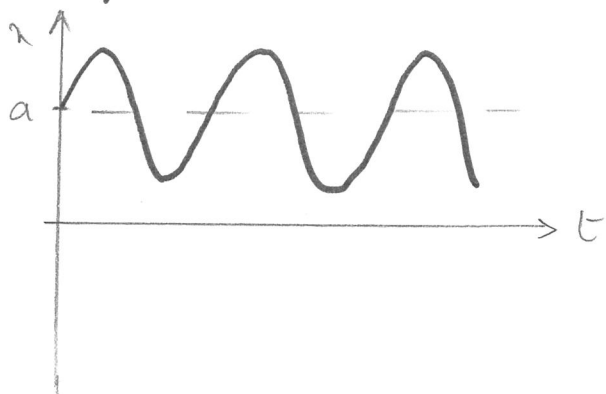
7.  $E_p(\pm a) = -\frac{ba^4}{4}$        $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} E_p(n) = +\infty$        $E_p(0) = 0$

8.

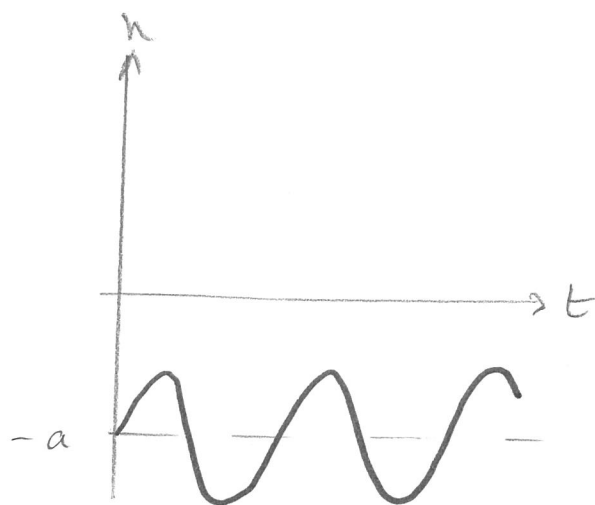


$$9. E_{\text{inv}} = E_p(0) - E_p(a) = \frac{ba^4}{4}$$

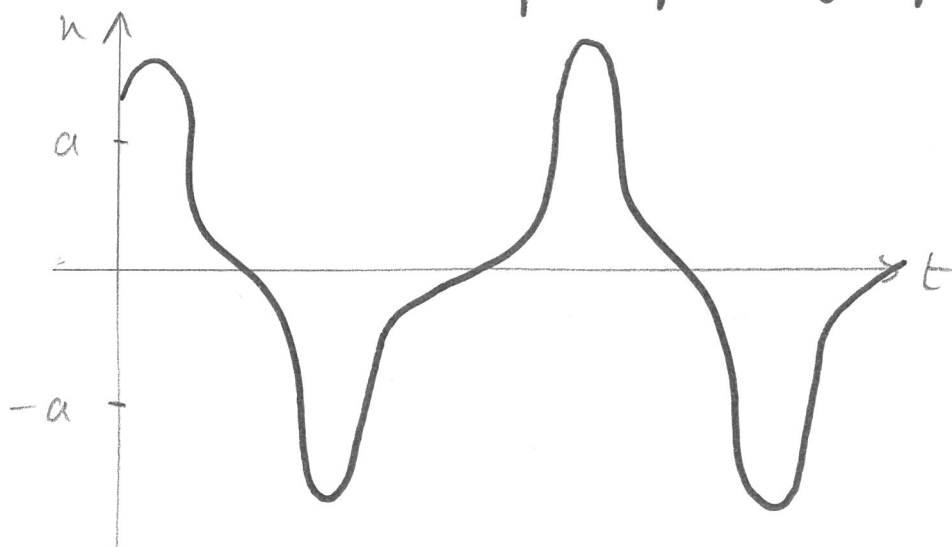
10. • Pour  $E_m < 0$ ,  $N$  oscille autour d'une position d'équilibre stable.



ou



• Pour  $E_m > 0$ ,  $N$  oscille autour de  $n = 0$ , en ralentissant à chaque passage par 0.



11. Au voisinage de  $n = a$ ,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -bn(n-a)(n+a)\vec{u}_n \\ &\simeq -ba(n-a)2a\vec{u}_n \\ &\simeq -2ba^2(n-a)\vec{u}_n \end{aligned}$$

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\ddot{n} \simeq -2ba^2(n-a) \quad \ddot{n} + 2\frac{ba^2}{m}(n-a) = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{2 \frac{ba^2}{m}}$

d'où 
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2ba^2}}$$

12.  $m = \frac{M_N}{N_A} = \frac{14 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{23}} \text{ kg} = 2,3 \times 10^{-26} \text{ kg}$

$b = \frac{4E_{inv}}{a^4}$  d'où  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m a^2}{8E_{inv}}}$   
 $= \pi a \sqrt{\frac{m}{2E_{inv}}}$

$E_{inv} = 0,25 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$

$$T_0 = 6,6 \times 10^{-14} \text{ s} = 0,66 \text{ fs}$$



17. En représentation complexe, l'équation du mouvement

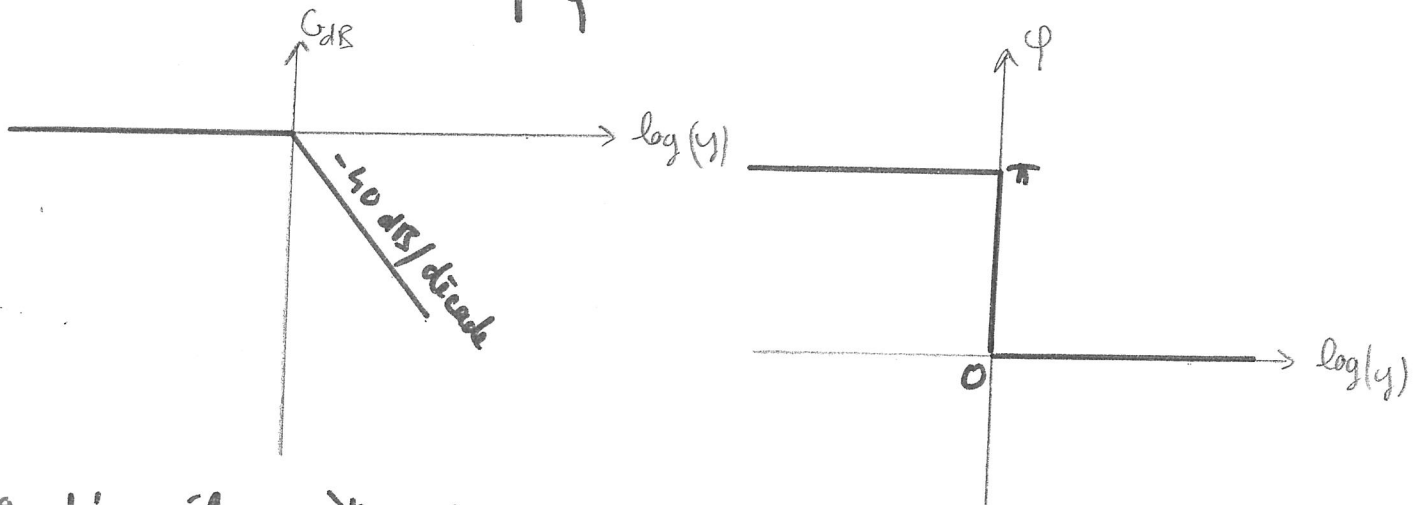
devient : 
$$-\omega^2 \underline{X} + \frac{\omega_0}{Q} i\omega \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = -A$$

Donc 
$$\underline{M} = \frac{-\omega_0^2}{-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2}$$

$$\underline{H}(iy) = \frac{1}{y^2 - 1 - \frac{iy}{Q}}$$

18.  $\underline{H} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} -1$  donc  $\begin{cases} G_{dB} \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \pi \end{cases}$  ( $\text{Im}(\underline{H}) > 0 \Rightarrow \varphi \in [0; \pi]$ )

$\underline{H} \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{y^2}$  donc  $\begin{cases} G_{dB} \sim -40 \log|y| \\ \varphi \rightarrow 0 \end{cases}$



19. L'accéléromètre doit reproduire l'accélération  $a$ ,  
 dans le domaine d'utilisation est  $f \leq f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

20.  $G = \frac{1}{\sqrt{f(y)}}$  avec  $f(y) = (y^2 - 1)^2 + \frac{y^2}{Q^2}$

$$f'(y) = 2(y^2 - 1)2y + \frac{2y}{Q^2} = 2y(2y^2 - 2 + \frac{1}{Q^2})$$

On étudie le signe de  $f'(y)$

$$f'(y) > 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 > 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Condition de résonance :  $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$

c-d-d

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

21.  $Q = 5$  donc  $\omega_n \approx \omega_0$      $\omega_0 \approx 2\pi \cdot 10^3 \text{ Hz}$

Pour  $f \ll f_0$ ,  $G \approx 1$  donc  $X = \frac{A}{\omega_0^2}$  avec  $A = g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$

$$X = \frac{10}{(2\pi \cdot 10^3)^2} \text{ m} = \frac{10}{4 \times 10^6} \text{ m}$$

$$X = 2,5 \times 10^{-7} \text{ m} = 0,25 \text{ } \mu\text{m}$$

Sur la figure, l'écart entre 2 dents est de l'ordre de 10  $\mu\text{m}$ . Le déplacement  $X$  est faible devant cet écart.

### 3. Accord de guitare

22. la valeur moyenne est d'environ  $\boxed{10 \text{ mV}}$

23. On relève  $T = 3,2 \text{ ms}$ .  $\boxed{f = \frac{1}{T} = 312,5 \text{ Hz}}$

24. Il s'agit de la corde mi aigu

25. le signal n'est pas sinusoïdal, donc le spectre fera apparaître des harmoniques.

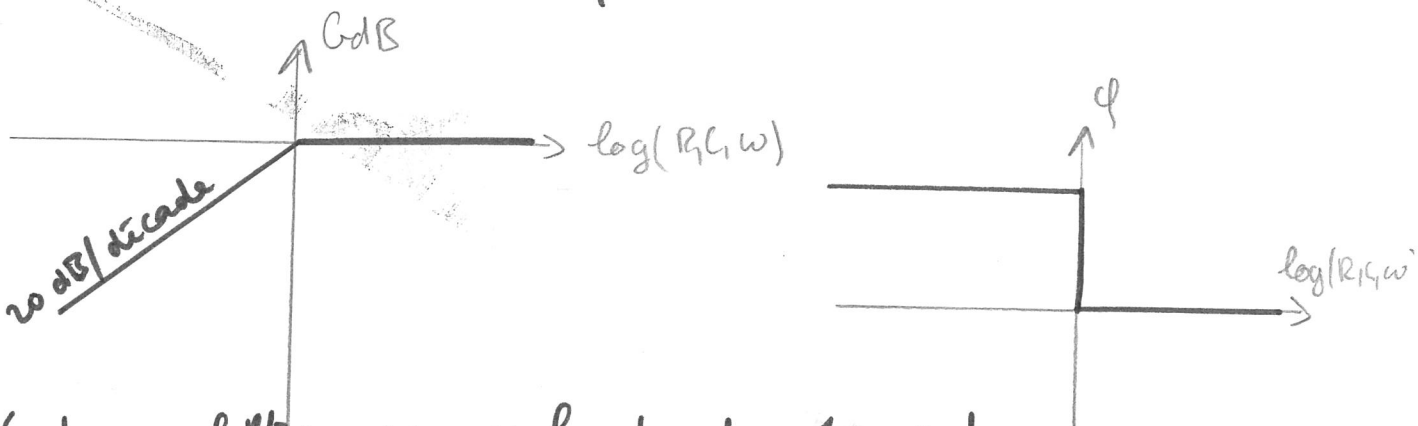
26.  $H_1(j\omega) = \frac{u_1}{u_e}$

On identifie un diviseur de tension.

$$H_1(j\omega) = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_1 C}}$$

27.  $H_1 \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} j\omega R_1 C$  donc  $\begin{cases} G_{dB} \sim 20 \log(R_1 C \omega) \\ \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$H_1 \underset{\omega \rightarrow \infty}{\rightarrow} 1$  donc  $\begin{cases} G_{dB} \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow 0 \end{cases}$



c'est un filtre passe-haut du 1er ordre



$$28. G_1 = |H_1| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(R_1 C_1 \omega)^2}}}$$

$\omega_1$  est la pulsation telle que  $G_1(\omega_1) = \frac{G_{rel}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d'où  $(R_1 C_1 \omega_1)^2 = 1$  soit  $\boxed{\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}}$

$$29. H_1(j\omega_1) = \frac{1}{1-j}$$

donc  $\varphi_1(\omega_1) = 0 - \arg(1-j) = \frac{\pi}{4}$

$$30. f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \quad \left| \begin{array}{l} R_1 = 100 \times 10^3 \Omega \\ C_1 = 100 \times 10^{-9} F \end{array} \right.$$

$$\boxed{f_1 = 15,9 \text{ Hz}}$$

$f_1 \ll f_c = 312,5 \text{ Hz}$ , donc le rôle de ce filtre est de couper la composante continue.

$$31. \underline{z}_e = \frac{\underline{u}_1}{\underline{i}_+} \quad i_+ = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{z}_e \rightarrow +\infty}$$

Concevoir des filtres de grande impédance d'entrée (et de faible impédance de sortie) permet de garantir leur fonctionnement lorsqu'ils sont mis en cascade, car la fonction de transfert globale est alors le produit des fonctions de transfert en sortie ouverte.

32. On identifie un diviseur de tension.

$$\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} = \frac{R_3}{R_3 + (R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C_2})} = \frac{R_3}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \underline{H}_2(j\omega) &= \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = 1 + \frac{1}{\frac{R_3}{R_2} + j R_3 C_2 \omega} \\ &= 1 + \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1 + j R_2 C_2 \omega} \end{aligned}$$

On identifie  $G_0 = \frac{R_2}{R_3}$  et  $\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$

33.  $|\underline{H}_2| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1 + \frac{R_2}{R_3}$  (basse fréquence)

$|\underline{H}_2| \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 1$  (haute fréquence)

34.  $f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 498 \text{ Hz}$

$$G_0 = \frac{R_2}{R_3} = 113$$

Le filtre sert à amplifier les fréquences utiles, c-à-d pouvant correspondre aux cordes de la guitare.

35. On relève  $G_{dB}(f_{co}) = -6 \text{ dB}$

$$20 \log G = -6 \text{ dB}$$

$$G = 10^{-\frac{6}{20}} = 0,5$$

le fondamental est atteint d'un facteur 2.

36.  $G_{ref} = G_{max} = 10^0 = 1$

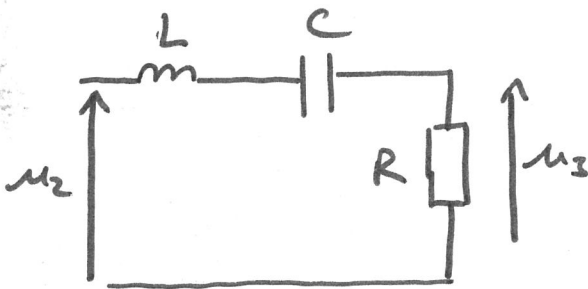
La bande passante est l'ensemble des fréquences, telles que  $G(f) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , soit  $G_{dB} \geq -3 \text{ dB}$ .

$f_{c1} = 320 \text{ Hz}$      $f_{c2} = 337 \text{ Hz}$  d'où  $\Delta f = 17 \text{ Hz}$

$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$  donc  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$  avec  $f_0 = 328 \text{ Hz}$

$$Q = 19$$

37.



Diviseur de tension :  $\underline{H}_3(j\omega) = \frac{\underline{u}_3}{\underline{u}_2} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$

$$\underline{H}_3 = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

On identifie  $\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases}$

d'où

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

38.  $f_0 = 328 \text{ Hz}$  et  $Q = 19$

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{L4\pi^2 f_0^2}$$

$$C = 2,4 \times 10^{-4} \text{ F}$$

$$\boxed{C = 240 \mu\text{F}}$$

$$R = \frac{L\omega_0}{Q}$$

$$\boxed{R = 0,11 \Omega}$$

Ces valeurs ne sont pas réalisables en électronique.  
C est trop grande et R est inférieure à la résistance interne d'une bobine.

39.  $\langle u_e \rangle = 10 \text{ mV}$  donc  $u_e$  est le (b)

•  $u_1$  n'a pas de composante continue et n'a pas été amplifiée, donc  $u_1$  est le (d)

•  $u_2$  n'a pas de composante continue et a été amplifiée, donc  $u_2$  est le (c)

40. Le filtre 3 sélectionne le fondamental aux alentours de  $315 \text{ Hz}$ . L'amplitude est atténuée d'un facteur 2 environ,

