Données pour tous les exercices :

— Constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}

— Masse du Soleil : $M_\odot = 2,0 \times 10^{30}$ kg

— Masse de la terre : $M_\oplus = 6,0 \times 10^{24}$ kg

— Rayon de la Terre : $R_\oplus = 6,4 \times 10^3$ km

1 Pendule simple, le retour

Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple par le théorème du moment cinétique.

2 Mouvement d'une masse accrochée à un ressort

Une masse m, assimilée à un point matériel M, est accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est fixée au point O. Le ressort peut tourner autour du point O. On néglige le poids.

1. Montrer que le mouvement est plan.
2. Montrer que $C = r^2\dot{\theta}$, où (r, θ) sont les coordonnées polaires de M dans le plan du mouvement, est une constante du mouvement.
3. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{\mathrm{p,eff}}(r)$.
4. Tracer l'allure du graphe $E_{\mathrm{p,eff}}(r)$ et déterminer le type de mouvement possible.
5. Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, montrer que le mouvement est uniforme et établir l'expression de la période de rotation T, en fonction du rayon R de la trajectoire, k, m et ℓ_0.

3 Pesanteur sur Jupiter

— Rayon de Jupiter : 70 000 km

— Distance Io-Jupiter (centre à centre) : 420 000 km

— Période de révolution de Io : 1,8 j

Io est un satellite naturel de Jupiter, dont l'orbite est pratiquement circulaire.

1. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.
2. Calculer la pesanteur sur Jupiter g_{J}.

4 Comète de Halley

En 1705, Edmond Halley publia un livre avancant que les comètes qui étaient apparues dans le ciel en 1531, 1607 et 1682 étaient en fait une seule et même comète. Expliquant que la comète voyage sur une orbite elliptique, et prend 76 ans pour faire une révolution complète autour du Soleil, Halley prédit qu'elle reviendrait en 1758.

En 1757, Lalande, aidé par Nicole-Reine Lepaute, et sur la base des formules concues par Clairaut, décida de calculer les déviations de la comète dues aux grosses planètes. Il prédit un retard de 518 jours dû à Jupiter et de 100 jours dû à Saturne. Il annonca donc le retour de la comète, non en 1758, mais en 1759 avec un passage au périhélie en avril 1759, avec une incertitude d'un mois. Lorsque la comète réapparut en décembre 1758 avec un passage au périhélie le 13 mars 1759, ce fut un triomphe. Cette prévision permit d'asseoir définitivement la mécanique newtonienne en France, la théorie des tourbillons de Descartes tombant dans l'oubli.

Lors de son passage au périhélie (position de l'orbite la plus proche du Soleil), la vitesse de la comète vaut $v_P = 54,5$ km/s, et sa distance au Soleil $r_P = 0,59$ ua, où ua est l'unité astronomique de longueur, égale à la distance Terre-Soleil, soit 1 ua $= 149,6$ Gm.

1. Établir les expressions de v_A et r_A, la vitesse et la distance à l'aphélie (position de l'orbite la plus éloignée du Soleil), en fonction de v_P, r_P, $\mathcal{G}$ et $M_\odot$. Calculer leurs valeurs. On exprimera r_A en ua.
2. Calculer la période T de la comète de Halley.

5 Lancement d'un satellite géostationnaire

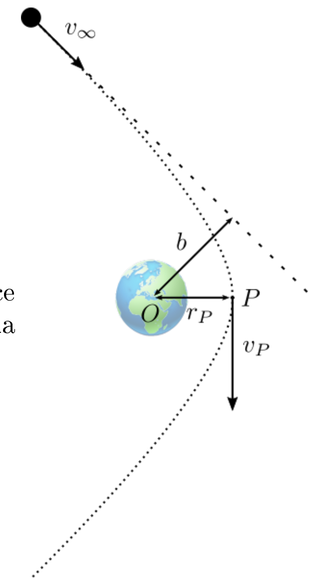
On étudie le lancement d'un satellite à l'aide d'un lanceur (fusée), puis son placement sur l'orbite géostationnaire. Le lanceur décolle de l'équateur et amène le satellite sur une orbite elliptique de transfert. Le périgée de cette orbite est à l'altitude de fin de combustion du dernier étage du lanceur, de l'ordre de 200 km. Son apogée se situe à l'altitude de l'orbite géostationnaire. Lorsque le lanceur atteint l'orbite de transfert, il se désolidarise du satellite qui rejoint seul l'orbite géostationnaire. Une fois arrivé à l'apogée, le satellite utilise un moteur intégré pour circulariser son orbite.

1. Calculer le rayon de l'orbite géostationnaire.
2. Sur un schéma représenter la Terre de centre O, l'orbite géostationnaire et l'orbite de transfert. Placer le périgée P et l'apogée A de l'orbite de transfert. Exprimer a le demi grand-axe de l'orbite de transfert en fonction de r_A et r_P.
3. Calculer la durée passée par le satellite sur l'orbite de transfert.
4. Établir l'expression de l'énergie mécanique d'un satellite sur une orbite circulaire de rayon R. Généraliser sans démonstration cette expression à une trajectoire elliptique de demi grand-axe a.

En raison de la propulsion par réaction, le travail fourni par les moteurs-fusées n'est pas intégralement recu par le véhicule spatial, mais partagé entre le véhicule spatial et les gaz éjectés. La quantité d'ergol[1] nécessaire à une manœuvre spatiale est en réalité proportionnelle à la variation de vitesse $\Delta v = v_f - v_i$ au cours de la manœuvre.

5. Calculer le Δv nécessaire pour rejoindre l'orbite de transfert depuis la Terre. On n'oubliera pas de prendre en compte la vitesse initiale due à la rotation de la Terre.
6. Calculer le Δv nécessaire pour circulariser l'orbite une fois l'apogée de l'orbite de transfert atteinte.
7. Conclure sur la nécessité d'utiliser un lanceur. Pourquoi les orbites de transfert sont-elles encombrées de débris spatiaux ?

6 Don't look up



Un astéroïde fonce sur la Terre avec une vitesse v_∞ et un paramètre d'impact b.

En utilisant les constantes du mouvement, établir l'expression de la distance minimale d'approche r_P, en fonction de v_∞, b, la constante de gravitation $\mathcal{G}$ et la masse de la Terre $M_\oplus$.

A quelle condition l'astéroïde s'écrase-t-il sur la Terre ?

7 Freinage d'un satellite par l'atmosphère

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel de masse m en orbite circulaire autour de la Terre.

1. Montrer que le mouvement est uniforme et établir la relation entre r, v, $\mathcal{G}$ et $M_\oplus$.
2. En déduire l'expression de l'énergie mécanique en fonction de m et v.

L'atmosphère exerce sur le satellite une force de frottement $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$. On suppose que la trajectoire du satellite dans le référentiel géocentrique reste pratiquement circulaire de sorte que les expressions précédentes restent valables, mais que le rayon r et la vitesse v varient lentement dans le temps.
A l'instant initial, le satellite se situe à la distance r_0 du centre de la Terre.

3. En appliquant le théorème de la puissance mécanique, établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.
4. En déduire l'expression de $v(t)$. Comment évolue $v(t)$?
5. Déterminer le temps t_f, auquel le satellite s'écrase sur la Terre en fonction de r_0, α, $\mathcal{G}$, $M_\oplus$ et $R_\oplus$.

1. Un ergol est une substance utilisé pour produire l'énergie nécessaire à la propulsion d'un véhicule spatial. Il est constitué d'un mélange d'éléments oxydants (comburant) et réducteurs (carburant ou combustible).

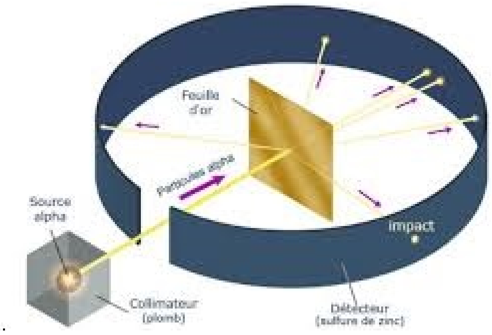
8 Expérience de Rutherford

Dans l'expérience de Rutherford, menée en 1909, une très fine feuille d'or est irradiée par un faisceau de particules α (noyaux d'hélium ${}^4_2\mathrm{He}$) d'énergie 5 MeV, émis par une source radioactive. Certaines particules, très peu nombreuses, sont déviées avec un angle pouvant dépasser 90°, montrant que la partie chargée positivement de la matière est concentrée en un espace de petit volume, le noyau atomique.

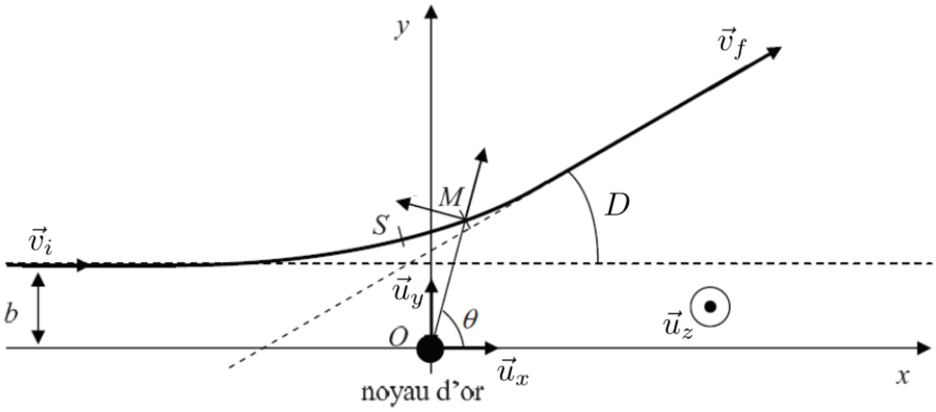
Données :

— masse d'un nucléon : $m_n = 1,67 \times 10^{-27}$ kg

— constante électrique : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m



On considère une particule α de masse m et de charge q_α en interaction avec un noyau d'or ${}^{179}_{79}\mathrm{Au}$ de charge q_{Au}, situé en O. La particule vient de l'infini avec une vitesse $\vec{v}_i = v_i\vec{u}_x$ et un paramètre d'impact b ; on note $\vec{v}_f$ sa vitesse finale. On cherche à déterminer l'angle de déviation D, c'est-à-dire l'angle de $\vec{v}_f$ avec $\vec{u}_x$.



1. Justifier que le noyau d'or peut être supposé fixe dans le référentiel du laboratoire et qu'on peut négliger l'effet des électrons de l'atome d'or sur la particule α.
2. Montrer que le mouvement est plan. Quel est la nature de la trajectoire ?
3. Montrer que $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement et déterminer son expression en fonction de v_i et b.
4. En intégrant le principe fondamental de la dynamique, montrer que

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = K \int_{t_i}^{t_f} \frac{\vec{u}_r}{r^2} dt$$

   où K est une constante dont on donnera l'expression en fonction q_α, q_{Au}, m et ϵ_0.
5. En projetant la relation précédente sur $\vec{u}_y$, établir la relation vérifiée par l'angle de déviation D

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{K}{v_i^2 b}$$

6. On considère une particule α arrivant avec un paramètre d'impact $b = 0$.
   (a) Que vaut l'angle de déviation dans ce cas ?
   (b) Établir l'expression de la distance minimale d'approche $r_{\min}$, en fonction de v_i et K.
   (c) Calculer $r_{\min}$. Comparer avec le rayon d'un atome, puis avec le rayon du noyau d'un atome.

9 Manœuvre d'Oberth

On considère une fusée, de masse m, dans le champ de gravitation d'un astre immobile de masse M situé au point O. Le vaisseau est initialement situé sur une orbite circulaire de rayon r_0, sur laquelle sa vitesse est v_0.

1. Établir la relation entre v_0, r_0, $\mathcal{G}$ et M.

On envisage plusieurs stratégies pour échapper au champ gravitationnel de l'astre. Les réacteurs de la fusée disposent d'une réserve de vitesse de $4v_0$, c'est-à-dire qu'ils peuvent faire varier le vecteur vitesse de la fusée, en une ou plusieurs fois, de telle sorte que la somme des valeurs absolues des variations de vecteur vitesse n'excède pas $4v_0$. À chaque fois, les changements de vitesse seront considérés instantanés.

2. Dans la première stratégie, on utilise toute la réserve de vitesse en une fois. Déterminer la vitesse de la fusée, en fonction de v_0, quand elle se trouve à l'infini de l'astre.
3. Dans la deuxième stratégie, on réduit d'abord la vitesse de v_0 à $v_0/2$ sans changer la direction du vecteur vitesse.
   (a) Déterminer l'énergie mécanique sur la nouvelle trajectoire, en fonction de $\mathcal{G}$, m, M et r_0. Préciser la nature de cette nouvelle trajectoire.
   (b) On note P le périapside, c'est-à-dire le point de la trajectoire le plus proche de l'astre. En utilisant les constantes du mouvement, déterminer la distance r_P en fonction de r_0, et la vitesse v_P en fonction de v_0.

   Dans un deuxième temps, on utilise le reste de la réserve de vitesse en une seule fois pour augmenter au maximum la vitesse lors du passage à la distance r_p.
   (c) Déterminer l'énergie mécanique sur la trajectoire finale, en fonction de m et v_0. En déduire la nature de la trajectoire finale.
   (d) Sur un même schéma, représenter l'orbite circulaire initiale, l'orbite intermédiaire et la trajectoire finale.
   (e) Déterminer la nouvelle vitesse à l'infini, en fonction de v_0. Conclure.

10 Taille d'un trou noir

1. Déterminer la vitesse de libération $v_\ell(r)$ d'une particule située à la distance r d'un trou noir de masse M, c'est-à-dire la vitesse minimale pour que cette particule s'échappe du champ de gravitation du trou noir.

Le rayon de Schwarzschild est le rayon de l'horizon d'un trou noir, c'est-à-dire le rayon en dessous duquel même les photons ont des trajectoires elliptiques et ne peuvent pas s'échapper du voisinage du trou noir.

2. Exprimer le rayon de Schwarzschild en fonction de la masse M du trou noir, de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$ et de la célérité de la lumière dans le vide c. Discuter la validité de cette expression.
3. Estimer la taille d'un trou noir dont la masse serait celle de la Terre

11 Obtention numérique de la trajectoire dans un champ newtonien

On considère un point matériel de masse m dans un champ newtonien $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u}_r$ avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = v_0 \end{cases}$$

Pour adimensionner le problème, on prend $\frac{K}{m} = 1$ et $x_0 = 1$.

1. Prévoir le type de trajectoire selon la valeur de v_0.
2. Établir le système d'équations différentielles vérifiées par les coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$.
3. En utilisant la méthode d'Euler ou la fonction `odeint` du module scipy.integrate, écrire un programme python pour obtenir la trajectoire du mouvement avec $v_0 = 1$, pour $t \in [0; 10]$.
4. Superposer les trajectoires obtenues pour 10 valeurs de v_0 régulièrement espacées entre 0,5 et 1,5.
5. Établir de même le système d'équations différentielles vérifiées par les coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$.
6. Vérifier qu'on obtient la même trajectoire avec $v_0 = 1$, pour $t \in [0; 10]$, en résolvant le système en coordonnées polaires.

12 Trajectoire d'un volant de badminton

On souhaite obtenir numériquement la trajectoire d'un volant de badminton. Le volant possède une masse $m = 5,3$ g, un rayon $R = 3,4$ cm (rayon à l'extrémité de la jupe) et un coefficient de traînée $C_x = 0,65$ (dû à la forme du volant). En plus du poids, le volant est soumis à une force de frottement quadratique :

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 v\vec{v}$$

où $\rho = 1,2$ kg.m^{-3} est la masse volumique de l'air.

1. Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\dot{x}}{L}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \\ \ddot{y} = -\dfrac{\dot{y}}{L}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - g \end{cases} \tag{1}$$

   où L est la longueur caractéristique du problème, dont on calculera la valeur.

2. En utilisant la fonction `odeint` du module scipy.integrate, résoudre numériquement le système (1) pour une vitesse initiale $v_0 = 40$ m/s faisant un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec l'horizontal et une position initiale $(0, 0)$. On prendra $t \in [0, 3$ s$]$. Tracer la trajectoire $y(x)$. On choisira judicieusement la plage des y pour ne pas afficher les ordonnées négatives, en utilisant la fonction `plt.ylim(ymin,ymax)`. Comparer la portée avec la longueur réglementaire d'un terrain de badminton : $13,4$ m.

3. Superposer 10 trajectoires pour des valeurs de $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. La portée maximale est-elle atteinte pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, comme dans le cas sans frottements ?

4. Superposer 10 trajectoires pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $v_0 \in [0, 50$ m/s$]$. Observer l'évolution de la forme de la trajectoire.