Nom: **Prénom:**

1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Définition de f convexe.

2) Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Donner toutes les caractérisations des fonctions convexes du cours (il y en a quatre).

3) Décrire l'ensemble $\mathrm{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 2)$ et $v = (1, 2, 1)$ par une équation.

4) Montrer **à l'aide de la caractérisation** que $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / 3x - y + z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$. **Puis**, en donner une famille génératrice.

5) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \; / \; \widetilde{P}(2) = \widetilde{P}'(2) = 0\}$ est un ev en en donnant une famille génératrice.

6) Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AM = 0_2\}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à l'aide de la caractérisation.

7) Lesquels de ces ensembles ne sont pas des sev de E? **Justifier pour ceux qui n'en sont pas. On ne demande pas de justifier pour ceux qui sont des sev.**

-a- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4\}$ où $E = \mathbb{R}^4$

-b- $F_2 = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;/\; (u_n)_n \text{ converge}\}$, $F_3 = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;/\; (u_n)_n \text{ décroissante}\}$ où $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

-c- $F_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;/\; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\}$, $F_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;/\; f \text{ négative}\}$ où $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

8) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

-a- Définition de $F + G$.

-b- Définition de $F \oplus G = E$.

-c- Donner la caractérisation de $F \oplus G = E$.

9) Soit $F = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1, 2)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 3x - y + z = 0\}$ (G de la question 4))

-a- Montrer à l'aide de la définition que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

-b- Montrer à l'aide des familles génératrices que $F + G = \mathbb{R}^3$. Puis montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ à l'aide de la caractérisation.

10) S'il vous reste du temps, donner une famille génératrice de F de la question 6).