Chapitre XIX
Applications linéaires

I Définitions et première propriétés

E et F désignent dans cette partie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I.1 L'ensemble des applications linéaires

Théorème-Définition (Application linéaire)

- On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que:

  (i) $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ (ii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ f(\lambda x) = \lambda f(x)$

  ce qui est équivalent à

  (iii) $\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

  ce qui est équivalent à

  (iii)' $\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

  NB : version qui sera le plus souvent utilisée.
  L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.

- On appelle **endomorphisme linéaire** de E toute application linéaire de E dans E est . Leur ensemble est noté $\mathcal{L}(E)$.

- On appelle **isomorphisme** toute application linéaire de E dans F et bijective.

- On appelle **automorphisme** de E tout endomorphisme bijectif de E dans E. Leur ensemble est noté $\mathrm{GL}(E)$.

- On appelle **forme linéaire** toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. Leur ensemble est noté $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

Théorème (Propriétés des applications linéaires)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors:

1) **Transport du neutre.** $f(0_E) = 0_F$

2) **Image d'une combinaison linéaire.** Pour tous $(x_i)_{i\in \mathrm{i}} \in E^I$, $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle :

$$f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i).$$

Exercice.

1) Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x, x+y) \end{array}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x+y+1 \end{array}$ n'est pas linéaire.

3) Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^2+x, x+y) \end{array}$ n'est pas linéaire.

4) Quelles sont les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Et de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

5) Montrer que l'application $F: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est linéaire.

6) Montrer que l'application $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une forme linéaire.

7) Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n) \text{ converge}\}$. Montrer que l'application $L: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (u_n) & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}$ est une forme linéaire.

8) **À connaître : les homothéties**. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, on appelle homothétie sur E de rapport α l'application $h_\alpha: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \alpha x \end{array}$. Montrer h_α est un endomorphisme de E.
Cas particulier : si $\alpha = 1$, $h_\alpha = \mathrm{Id}_E$ et si $\alpha = 0$, $h_\alpha = 0_{E^E}$.

I.2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème (Opérations sur les applications linéaires)

1) **Structure de** $(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot)$. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est sous-espace vectoriel de F^E. Autrement dit, la combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \qquad \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E,F).$$

2) **Composition d'applications linéaire**. La composée d'applications linéaires est linéaire.

3) **"Distributivité"**. Soient $(f_1,f_2) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$ et $(g_1,g_2) \in (\mathcal{L}(F,G))^2$ alors:

$$g\circ(f_1+f_2) = g\circ f_1 + g\circ f_2, \qquad \underbrace{(g_1+g_2)\circ f = g_1\circ f + g_2 \circ f}_{\text{vrai si les applications ne sont pas linéaires}}.$$

4) **Endomorphismes de** E.

(i) **Structure de** $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$. $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau.

(ii) **Formule du binôme**. Soient $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f et g commutent i.e. $f\circ g = g\circ f$, alors:

$$(f+g)^n = (f+g)\circ\cdots\circ(f+g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

(ii) **Formule de factorisation**. Soient $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f et g commutent i.e. $f\circ g = g\circ f$, alors:

$$f^n - g^n = (f-g)\circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k-1},$$

où $f^k = f\circ\cdots\circ f$ avec pour convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

⚠ **Attention** ⚠ $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ n'est ni commutatif, ni intègre. Contre-exemple :

Exercice. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Calculer $(\mathrm{Id}_E - f)(\mathrm{Id}_E + f)$. En déduire que si $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $\mathrm{Id}_E + f$ est bijective.

Théorème (Isomorphismes linéaires)

1) **Composée d'isomorphismes**. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.
2) **Réciproque d'isomorphisme**. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
3) **Structure de** $(\mathrm{GL}(E), \circ)$. En particulier, l'ensemble des automorphismes de E, $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, est un groupe appelé **groupe linéaire de** E.

Exercice. Déterminer une CNS sur $\alpha \in \mathbb{K}$ pour que $h_\alpha : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \alpha x \end{array}$ soit élément de $\mathrm{GL}(E)$.

⚠ **Attention** ⚠ Le groupe $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ n'est pas commutatif. L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ n'est stable ni par la multiplication par un scalaire, ni par la somme.

I.3 Image d'une base

Théorème (Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base.)

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = u_i$.
Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de l'ensemble de départ.

Exemple Déterminer l'expression de l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ vérifiant :

$$f(1,0,0) = (1,-2) \qquad f(0,1,0) = (2,-3) \qquad f(0,0,1) = (4,0).$$

Théorème (Une application linéaire est déterminée par ses restrictions à une somme directe)

On suppose que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ où les E_i sont des sev de E. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit $f_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.
Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_{|E_i} = f_i$.
Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sev supplémentaires.

II Noyau et image

II.1 Définitions

Dans cette section E et F designent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Théorème (Image directe - Image réciproque)

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, A un sous-espace vectoriel de E et B un sous-espace vectoriel de F. Alors:

1) **Image directe**. $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.
   Famille génératrice de l'image. Si $A = \mathrm{Vect}((e_i)_{i \in I})$ alors $f(A) = \mathrm{Vect}((f(e_i))_{i \in I})$.
2) **Image réciproque**. $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Comme conséquence de ce résultat, on obtient les définitions suivantes:

Théorème-Définition (Noyau - Image)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Le **noyau de** f, noté $\operatorname{Ker} f$, est $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$.
  $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.
- L'**image de** f, noté $\operatorname{Im} f$, est $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \,/\, x \in E\} = \{y \in F \,/\, \exists x \in E\,,\, y = f(x)\}$.
  $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

  Famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

  $$\text{Si } E = \operatorname{Vect}((e_i)_{i\in I}) \text{ alors } \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((f(e_i))_{i\in I}).$$

✎ Méthode pratique ✎ (Comment déterminer le noyau d'une application linéaire)

Pour déterminer le noyau de $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Prendre $x \in E$,

$$x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0_F \Leftrightarrow ...$$

Dans certains cas, cela amène à un système linéaire qu'il s'agit de résoudre.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment déterminer l'image d'une application linéaire)

Pour déterminer l'image de $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- **Méthode 1**. Prendre $y \in F$,

  $$y \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists x \in E \,/\, y = f(x) \Leftrightarrow ....$$

  Il s'agit de trouver des conditions sur y pour que l'équation $y = f(x)$ admette des solutions. Dans certains cas, cela amène à un système linéaire dont il s'agit d'étudier la compatibilité.
- **Méthode 2**. On détermine une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ à l'aide d'une famille génératrice (souvent une base) de E. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E alors

  $$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Exercice.

1) Déterminer le noyau et l'image de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, x+2y) \end{array}$.

2) Déterminer le noyau et l'image de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, 2x+y+z, y+3z) \end{array}$.

3) Déterminer le noyau et l'image de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z) \end{array}$.

4) Déterminer le noyau et l'image de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

5) Déterminer le noyau et l'image de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (\widetilde{P}(0), \widetilde{P'}(1)) \end{array}$.

6) **Des inclusions classiques.** Soient $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

   -a- Montrer que :

   $$\operatorname{Im}(f \circ f) \subset \operatorname{Im} f \qquad\qquad \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f \circ f).$$

   -b- On suppose que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Établir une inclusion entre $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g$.

Méthode pratique (Comment montrer qu'un ensemble est un sev)

Pour montrer qu'une partie de E est un sev de E on peut montrer qu'il est le noyau d'une application linéaire.

Exemples

1) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \, / \, 2x - 3y + z + 5t = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.

2) $\{(X - 2)P \in \mathbb{R}[X] \, / \, P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$.

II.2 Injectivité et surjectivité

Théorème (Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide du noyau et de l'image)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors:

1) f est injective $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

2) f est surjective $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = F$.

Méthode pratique (Comment étudier l'injectivité/la surjectivité/ d'une application linéaire)

- Pour montrer que f est injectif on prouve que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
- Pour montrer que f est surjectif on prouve que $\operatorname{Im} f = F$.

Exercice. Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité des applications des exercices ci-dessus.

Propriétés (Image d'une famille libre et d'une famille génératrice)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une famille de E.

1) Si f est injective et $(e_i)_{i \in I}$ libre alors $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre.

2) Si f est surjective et $(e_i)_{i \in I}$ génératrice de E alors $(f(e_i))_{i \in I}$ est génératrice de F.

Théorème (Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité à l'aide de l'image d'une base)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) f injective $\Longleftrightarrow$ l'image d'une base de E est une famille libre de F.

2) f surjective $\Longleftrightarrow$ l'image d'une base de E est une famille génératrice de F.

3) $\boxed{f \text{ bijective } \Longleftrightarrow \text{ l'image d'une base de } E \text{ est une base de } F}$.

Exercice. On pose $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \;\; / \; P(0) = 0\}$. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ est un isomorphisme.

III Projecteurs et symétries

Dans cette partie E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

III.1 Projecteur

Définition (Projecteur ou projection vectorielle)

- Soient E_1 et E_2 deux sev supplémentaires dans E : $E_1 \oplus E_2 = E$.
  Le **projecteur** p (ou la **projection**) sur E_1 parallèlement à E_2 est défini par:

$$p: \begin{array}{ccc} E = E_1 \oplus E_2 & \to & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}.$$

- On dit que p est un **projecteur** s'il existe E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E tels que p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Théorème (Propriétés des projecteurs)

Soient E_1 et E_2 deux sev supplémentaires dans E et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Alors:

1) $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$
2) $\operatorname{Im} p = E_1$ et $\operatorname{Ker} p = E_2$
3) $E_1 = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ c'est-à-dire: $\forall x \in E, \quad x \in E_1 \Leftrightarrow p(x) = x$.
   Ainsi E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p.
4) $q = \operatorname{Id}_E - p$ est la projection sur E_2 parallèlement à E_1. q est appelé le **projecteur associé** à p.

Théorème (Caractérisation des projecteurs)

Soit $\boxed{p \in \mathcal{L}(E)}$. Alors:

$$p \text{ projecteur } \Leftrightarrow p \circ p = p.$$

Dans ce cas $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^2$ on pose $E_1 = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1)$ et $\varepsilon_2 = (2, 1)$. Déterminer l'expression de la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

2) Dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $E_1 = \mathbb{R}_1[X]$ et $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \widetilde{P}(1) = \widetilde{P}(2) = 0\}$. Déterminer l'expression de la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

3) Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (4x-6y, 2x-3y) \end{array}$. Montrer que p est un projecteur et en déterminer les éléments caractéristiques.

4) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p un projecteur de E. On pose $f = p + \lambda\,\mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, f^n en fonction de p et Id_E.

III.2 Symétries

Définition (Symétrie)

- Soient E_1 et E_2 deux sev supplémentaires dans E : $E_1 \oplus E_2 = E$.
  La **symétrie** s par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est définie par:

$$\begin{array}{rccc} s: & E = E_1 \oplus E_2 & \to & E \\ & x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}.$$

- On dit que s est une **symétrie** s'il existe E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E tels que s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Théorème (Propriétés des symétries)

Soient E_1 et E_2 deux sev supplémentaires dans E et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Alors:

1) $s \in \mathcal{L}(E)$, $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et donc s est bijective avec $s^{-1} = s$

2) $\mathrm{Im}\, s = E$ et $\mathrm{Ker}\, s = \{0_E\}$ (on retrouve le fait que s est bijective)

3) $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, $\quad E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ $\quad$ c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \qquad x \in E_1 \Leftrightarrow s(x) = x, \qquad x \in E_2 \Leftrightarrow s(x) = -x.$$

Ainsi E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants et E_2 est l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé.

4) $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ où p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Théorème (Caractérisation des symétries)

Soit $\boxed{s \in \mathcal{L}(E)}$. Alors:

$$s \text{ symétrie } \Leftrightarrow s \circ s = \mathrm{Id}_E\,.$$

Dans ce cas $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^2$ on pose $E_1 = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1)$ et $\varepsilon_2 = (2, 1)$. Déterminer l'expression de la symétrie sur E_1 parallèlement à E_2.

IV Formes linéaires

Dans cette section E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition (Forme linéaire)

On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire $\varphi : E \to K$. On note $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ ou E^* leur ensemble.

Exemples

1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & 2x - 3y + 5z \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

2) $F : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Théorème (Expression d'une forme linéaire)

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. On note $(x_i)_{i \in I}$ les coordonnées d'un vecteur x dans cette base. Alors

$$\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists (a_i)_{i \in I} \,/\, \forall x \in E, \quad \varphi(x) = \sum_{i \in I} a_i x_i.$$

Définition (Hyperplan)

On appelle **hyperplan** de E le noyau d'une forme linéaire non nulle : $H = \operatorname{Ker}\varphi$.
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E alors avec les notations de l'expression d'une forme linéaire :

$$x \in H \Leftrightarrow \sum_{i\in I} a_i x_i = 0.$$

L'équation $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$ est appelée **l'équation cartésienne** de H dans la base $(e_i) \in I$.
NB : un hyperplan est donc un sev de E.

Exemples

1) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 2x+5y=0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$.
2) Dans $\mathbb{R}^3$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 3x-y+4z=0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$.

Théorème (Caractérisation des hyperplans)

Soit H un sev de E tel que $H \neq E$. Alors :

$$H \text{ est un hyperplan } \iff \exists a \in E \setminus \{0_E\} \;/\; E = H \oplus \operatorname{Vect}(a).$$

NB : si H est hyperplan tout $a \in E \setminus H$ convient.

Exercice.

1) Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; 2x-3y+z-t=0\}$.
2) Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}[X]$ de $\{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; \widetilde{P}(1) = 0\}$.

Théorème (ÉquationS d'un hyperplan)

Les équations d'un même hyperplan sont proportionnelles.