Chapitre
Sous-espaces affines

I Préambule

- Une droite D_0 de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by = 0$ a une structure d'espace vectoriel.
  Mais quelle structure pour une droite D d'équation $ax + by = c$ où $c \neq 0$?

- Un plan P_0 de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$ a une structure d'espace vectoriel.
  Mais quelle structure pour un plan P d'équation $ax + by + cz = d$ où $d \neq 0$?

- L'ensemble solution $\mathcal{S}_0$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène $y' + ay = 0$ a une structure d'espace vectoriel.
  Mais quelle structure pour l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + ay = b$ avec b non nul?

- L'ensemble solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène $ay'' + by' + cy = 0$ a une structure d'espace vectoriel.
  Mais quelle structure pour l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation différentielle linéaire du second ordre $ay''+by'+cy = f$ avec f non nul ?

- L'ensemble solution du système linéaire homogène $AX = 0$ a une structure d'espace vectoriel.
  Mais quelle structure pour l'ensemble solution $\mathcal{S}$ du système linéaire du second ordre $AX = Y$ avec Y non nul?

$\boxed{\text{Dans ce chapitre, on considère un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel } E}$, le neutre de E sera noté $\overrightarrow{O}$.

II Sous-espaces affines

Définition (Sous-espace affine)

Une partie W de E est un **sous-espace affine** de E s'il existe un vecteur $A \in E$ et un sev $\overrightarrow{F}$ de E tel que

$$W = \{A + \overrightarrow{u} \,/\, \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}\} \overset{\text{noté}}{=} A + \overrightarrow{F}.$$

Par conséquent : $B \in W$ si et seulement s'il existe $\overrightarrow{u}$ tel que $B = A + \overrightarrow{u}$.

Vocabulaire.

- $\overrightarrow{F}$ est la **direction** du sous-espace affine W
- W est le **sous-espace affine passant par** A **de direction** $\overrightarrow{F}$
- Les éléments de W sont appelés des **points**, ceux de $\overrightarrow{F}$ sont des **vecteurs**.
- $\dim \overrightarrow{F}$ est la **dimension** du sous-espace affine W.

☞ **Explication** ☜ A, B, $\overrightarrow{u}$ sont des éléments de E, on les note différemment car A et B représentent des points et $\overrightarrow{u}$ représente un vecteur.
Même si $A + B$ et λA ont un sens (opérations ds E), on évite de le faire car ces opérations sur les points n'ont pas d'interprétation géométrique.

Remarques (Notation $\overrightarrow{AB}$)

- Si $B = A + \overrightarrow{u}$ on note $\overrightarrow{AB} = B - A = \overrightarrow{u}$.
- On obtient les propriétés pour $(A, B, C) \in W^2$,
  1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A = B$
  2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
  3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Remarques

- L'espace vectoriel E peut être considéré comme le sous-espace affine passant par $\overrightarrow{0}$ de direction E : $E = \overrightarrow{0} + E$.
  Les éléments de E peuvent alors être considérés comme des points ou des vecteurs selon que l'on considère E comme espace vectoriel ou sous-espace affine. Le vecteur nul de E sera noté $\overrightarrow{0}$ s'il est vu comme vecteur de E et O s'il est vu comme point.
- Les sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{F}$ de E sont des sous-espaces affines de E passant par $\overrightarrow{0}$: $F = \overrightarrow{0} + F$.

Définition (Droite, plan, hyperplan affines)

Supposons E de dimension finie n et soit W un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F}$.

- Si $\dim \overrightarrow{F} = 0$ alors W est réduit à un point.
- Si $\dim \overrightarrow{F} = 1$ alors W est une droite affine.
- Si $\dim \overrightarrow{F} = 2$ alors W est un plan affine.
- Si $\dim \overrightarrow{F} = n-1$ alors W est un hyperplan affine.

Exemples Ceux du préambule.

1) Dans $\mathbb{R}^2$ les sous espaces affines sont O, les droites affines et $\mathbb{R}^2$.
La droite $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 2x - 5y = 1\}$ se réécrit $D = (3, 1) + \mathrm{Vect}((5, 2))$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$ les sous espaces affines sont O, les droites affines, les plan affines et $\mathbb{R}^3$.
Le plan $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x - y + 3z = 3\}$ se réécrit $D = (1, 2, 1) + \mathrm{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1)$.

3) Dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble-solution $\mathcal{S}$ de $y' + 3y = 3x + 1$ est un sous espace affine de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

4) Dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble-solution $\mathcal{S}$ de $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3t}$ est un sous espace affine de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

5) Dans $\mathbb{R}^p$ l'ensemble-solution $\mathcal{S}$ du système $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$ est un sous-espace affine :

Exercice.

1) Montrer que l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est un plan affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2) Montrer que $W = \{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; P(2) = 1\}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{R}[X]$.

Définition (Translation)

Soit $\overrightarrow{a} \in E$. On appelle **translation de vecteur** $\overrightarrow{a}$ l'application $t_{\overrightarrow{a}} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & M + \overrightarrow{a} \end{array}$.

NB : ici E est vu comme un sous-espace affine, ensemble de points.

Théorème (Propriétés des sous-espaces affines)

Soit $W = A + \overrightarrow{F}$ un sous-espace affine de E, où $A \in E$ et $\overrightarrow{F}$ sous-espace vectoriel de E.
Pour tout $B \in W$, $W = B + \overrightarrow{F}$.
Autrement dit, **on ne change pas le sous-espace affine W si on prend un autre point de référence de W.**

III Intersection de sous-espaces affines

Théorème (Intersection de sous-espaces affines)

Soient W_1 et W_2 deux sous-espaces affines de E de directions respectives $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$. Alors $W_1 \cap W_2$ est

- soit vide
- soit un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F_1} \cap \overrightarrow{F_2}$.

Corollaire (Intersection de sous-espaces affines de directions supplémentaires)

Soient W_1 et W_2 deux sous-espaces affines de E de directions respectives $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ telles que $E = \overrightarrow{F_1} \oplus \overrightarrow{F_2}$. Alors $W_1 \cap W_2$ est un singleton.

IV Équations linéaires

Dans cette partie E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition (Équation linéaire)

Une **équation linéaire** d'inconnue $x \in E$ est une équation de la forme:

$$u(x) = b \quad (L) \qquad\qquad \text{où } u \in \mathcal{L}(E, F), \quad b \in F.$$

b est appelé **le second membre** de (L) et x **l'inconnue**. **L'équation homogène** associée à (L) est:

$$u(x) = 0_F \quad (H).$$

Exemples Toutes ces équations, sont des équations linéaires.

Type d'équations	Equations	Inconnue
Équations différentielles du 1er ordre	$y' + ay = b$	$y \in \mathcal{C}^1(I, K)$
Équations différentielles du 2nd ordre	$ay'' + by' + cy = f$	$y \in \mathcal{C}^2(I, K)$
Systèmes linéaires ($A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)	$AX = Y$	$X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$
Polynômes interpolateurs	$(P(x_0, \dots, P(x_n)) = (y_1, \dots, y_n)$	$P \in \mathbb{R}_n[X]$
Suites à double récurrence linéaire	$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$	$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

Pour chacun de ces exemples donner l'application u correspondante permettant d'écrire l'équation sous la forme correspondante.

Théorème (Nature de l'ensemble des solutions)

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in F$. On considère les équations linéaires d'inconnue $x \in E$

$$u(x) = b \ (L) \qquad\qquad u(x) = 0_F \ (H) \qquad \text{(équation homogène associée).}$$

On note $\mathcal{S}_{(L)}$ et $\mathcal{S}_{(H)}$ leurs ensembles de solutions respectifs.

1) L'ensemble $\mathcal{S}_{(H)}$ est le noyau de u (i.e. $\operatorname{Ker} u$), c'est en particulier un sous-espace vectoriel de E.

2) (i) Si $b \notin \operatorname{Im} u$, $\quad \mathcal{S}_{(E)} = \emptyset$.

   (ii) Si $b \in \operatorname{Im} u$, il existe une solution particulière $x_p \in E$ de (L), alors

$$\mathcal{S}_{(L)} = x_p + \mathcal{S}_{(H)} = x_p + \operatorname{Ker} u.$$

   $\mathcal{S}_{(L)}$ est donc le sous-espace affine passant par x_p de direction $\mathcal{S}_{(H)} = \operatorname{Ker} u$.

✎ Méthode pratique ✎ (Résolution d'une équation linéaire)

On cherche à résoudre l'équation linéaire (L) $u(x) = b$.

- Résolution de l'équation homogène associée, qui donne $\mathcal{S}_{(H)}$.
- Recherche d'une solution particulière x_p.
- L'ensemble-solution de (L) est : $x_p + \mathcal{S}_{(H)}$.

Exercice.

1) Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = \sin x$.

2) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^x$.

3) Déterminer les suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n + 4$ et $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.