Chapitre
Intégration sur un segment

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Continuité uniforme

Définition (Continuité uniforme)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ où I est un intervalle.
On dit que f est **uniformément continue** sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques (Analogie avec la continuité sur I)

On rappelle que f est continue sur I si

$$\forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Dans la définition de la continuité, δ dépend de x_0 (et de ε), alors que dans l'uniforme continuité, δ est indépendant de x_0 (dépend toujours de ε).
Conséquence, si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I, la réciproque est fausse.

Exemples

1) sin est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
2) Les fonctions lipschitziennes sur un intervalle sont uniformément continues sur cet intervalle.
3) $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème (de Heine)

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

II Intégrale de fonctions en escalier

II.1 Subdivision

Définition (Subdivision)

- On appelle **subdivision** du segment $[a, b]$ tout sous-ensemble fini de $[a, b]$ contenant les éléments a et b. On choisit de présenter les éléments de façon ordonné :

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

- La subdivision est dite **régulière** si pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_{k+1} - x_k$ est constant, et dans ce cas vaut $h = \dfrac{b-a}{n}$, appelé **pas de la subdivision** et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = a + kh$.

Remarques (Réunion de subdivision)

Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions de $[a, b]$ alors $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est une subdivision de $[a, b]$ plus fine que σ_1 et σ_2 car $\sigma_1 \subset \sigma$ et $\sigma_1 \subset \sigma$.

II.2 Fonctions en escalier

Définition (Fonctions en escalier)

- Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite en **escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
- La subdivision est, dite **adaptée (ou subordonnée)** à f.
- L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est noté $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

Remarques

1) Une subdivision adaptée n'est pas unique, on peut rajouter des points pour obtenir une subdivision plus fine.
2) La subdivision adaptée contient nécessairement les points de discontinuité.
3) Une fonction constante est en escalier.
4) Si $(f,g) \in (\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}))^2$, il existe une subdivision adaptée à f et g : la réunion de deux subdivisions adaptées respectivement à f et g.

Théorème (Structure de $\mathcal{E}$)

$(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel et $(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau.
De plus $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ est stable pour le module.

II.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème-Définition (Intégrale d'une fonction en escalier)

Soient $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, $\sigma = \{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $\sigma' = \{x'_i\}_{0\leqslant i\leqslant m}$ deux subdivisions adaptées à f telles que

$$\forall x \in]x_i, x_{i+1}[,\ \ f(x) = \alpha_i \qquad\qquad \forall x \in]x'_i, x'_{i+1}[,\ \ f(x) = \alpha'_i.$$

Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\alpha_i = \sum_{i=0}^{m-1}(x'_{i+1}-x'_i)\alpha'_i.$$

Ce réel indépendant de la subdivision adaptée à f est appelé **intégrale** de f sur $[a,b]$ et noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

☞ **Explication** ☜ Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ correspond à l'**aire algébrique** de la surface comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses. Si $f \geqslant 0$, cette intégrale est exactement l'aire de cette surface car il n'y a pas de contribution négative.

Remarques

1) Deux fonctions en escalier égales, sauf en un nombre fini de points, ont des intégrales égales.
2) Si f est consante sur $[a,b]$, $f : x \mapsto \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lambda(b-a)$.

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier)

Soient $(f, g) \in (\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors:

1) **Linéarité**. $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.

2) **Positivité**. Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.

3) **Croissance**. Si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

4) **Relation de Chasles** Si $c \in [a, b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

III Intégrale d'une fonction continue par morceaux

III.1 Fonction continue par morceaux

Définition (Fonction continue par morceaux sur un segment)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ du segment $[a, b]$ telle que

- $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ possède une limite finie à droite en x_i et à gauche en x_{i+1}.

On note $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonction continues par morceaux sur $[a, b]$.

Remarques (Continue $\Rightarrow$ continues par morceaux)

Si f est continue sur un segment I alors f est continue par morceaux sur I.

III.2 Approximation d'une fonction continue par morceaux

Théorème (Approximation d'une fonction continue par morceaux)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ, ψ sur$[a,b]$ telles que:

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad\qquad 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \epsilon.$$

☞ **Explication** ☜ Ce théorème signifie que l'on peut encadrer/approcher aussi précisément que l'on veut une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier.

III.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. On définit les parties de $\mathbb{R}$ suivantes:

$$E^+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \ / \ \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } f \leqslant \psi \right\} \qquad\qquad E^-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \ / \ \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leqslant f \right\}.$$

Alors $\inf E^+(f)$ et $\sup E^-(f)$ existent et sont égales, cette valeur commune est appelée **l'intégrale de** f **sur le segment** $[a,b]$ définie par :

$$\int_{[a,b]} f = \inf E^+(f) = \sup E^-(f).$$

☞ **Explication** ☜ On approche la surface comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses par le dessous (via $E^-(f)$) et par le dessus (via $E^+(f)$). Ainsi $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est l'**aire algébrique** de cette surface (avec contribution négative si f prend des valeurs négatives).

Remarques

- L'intégrale définie ci-dessus est appelée l'intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux. Il existe d'autres types d'intégrales : intégrales de Lebesgue, intégrale de Kurzweil-Henstock...
- Toutes les fonctions continues par morceaux, continues sur un segment sont intégrables au sens de Riemann. Il existe des fonctions bornées, non intégrables au sens de Riemann.
  Contre-exemple : pour $x \in [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
- Deux fonctions continues par morceaux égales, sauf en un nombre fini de points, ont des intégrales égales.

III.4 Propriétés de l'intégrale de fonctions continues par morceaux

Théorème (Propriétés de l'intégrale)

Soient $(f,g) \in (\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors:

1) **Linéarité**. $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.
2) **Positivité**. Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.
3) **Croissance**. Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.
4) **Relation de Chasles**. Si $c \in [a,b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.
5) **Majoration valeur absolue**. $\displaystyle\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

Théorème (Nullité de l'intégrale pour les fonctions positives)

Supposons $a < b$. Soit $\boxed{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \text{ telle que } f \geqslant 0}$.

1) S'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
2) Si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$.

⚠ **Attention** ⚠ Les hypothèses $\boxed{a < b}$, $\boxed{f \geqslant 0}$ et $\boxed{f \text{ continue}}$ sont indispensables.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(f,g) \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}))^2$,

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

avec égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

III.5 Notation définitive

Définition (Notation $\displaystyle\int_a^b f$)

Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{R})$ où I est un segment et $(a,b) \in I^2$. On pose:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a \leqslant b \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b \end{cases}. \qquad \text{Conséquence} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

✎ Méthode pratique ✎ (Comment montrer qu'une intégrale existe)

Pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

- **Méthode 1**. On montre que f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, ou bien que f est continue par morceaux **sur un intervalle** I et que $(a,b) \in I^2$.
- **Méthode 2**. Le plus souvent, on montre que f est continue sur le segment $[a,b]$, ou bien que f est continue **sur un intervalle** I et que $(a,b) \in I^2$.

Exercice.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe.

2) Déterminer l'ensemble de définition de f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \cos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.

Remarques (Conservation des propriétés...MAIS $a \leqslant b$.)

- Les propriétés : **positivité, croissance, majoration en valeur absolue, inégalité de Cauchy-Schwarz** sont valables avec la notation $\displaystyle\int_a^b$ à la condition que $a \leqslant b$.
- Les propriétés : **linéarité, relation de Chasles** sont valables avec la notation $\displaystyle\int_a^b$ sans hypothèses sur a et b.
- **Le théorème de nullité de l'intégrale** est valable avec la notation $\displaystyle\int_a^b$ à la condition que $a < b$.

Un objectif incontournable de ce chapitre est de savoir majorer/minorer une intégrale.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment majorer/minorer une intégrale)

- **Méthode 1** : pour montrer qu'une intégrale est positive on prouve que la fonction intégrée l'est et que les bornes de l'intégrales sont croissantes.
- **Méthode 2** : pour montrer qu'une intégrale est strictement positive utilise le théorème de nullité de l'intégrale.
- **Méthode 3** : pour obtenir un endadrement de $\int_a^b f$, on encadre f et on utilise la croissante de l'intégrale. Selon l'objectif, il faudra encadrer plus ou moins finement la fonction f, en tenant compte des bornes. Dans certains cas, une majoration de $\left|\int_a^b f\right|$ peut suffire à réaliser l'objectif. On utilise alors la majoration en valeur absolue, il s'agit de majorer $|f|$.
- **Méthode 4** : pour encadrer $\int_a^b fg$ on peut être amené à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$. Montrer que (I_n) est strictement décroissante, puis convergente.

Exercice. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t$, $J_n = \int_0^{2} \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t$, $K_n = \int_0^{1} \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t$. Montrer que les suites (I_n) et (K_n) convergent et (J_n) diverge et déterminer leur limite.

Exercice. Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+t^2} \mathrm{d}t$. Calculer $\lim_{x \to +\infty} I(x)$.

Exercice. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que f et g sont positives et $fg \geqslant 1$. Montrer que $\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x \geqslant 1$.

III.6 Extension aux fonctions complexes

On peut montrer qu'une application à valeurs dans $\mathbb{C}$ est continue par morceaux si et seulement si parties réelle et imaginaire sont continues par morceaux.

Définition (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{C})$. On définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t)) \, \mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}(f(t)) \, \mathrm{d}t.$$

⚠ **Attention** ⚠ L'intégrale d'une fonction à valeurs complexes ne peut plus être interprétée comme une aire.

Théorème (Propriétés de l'intégrale)

Soient $(f,g) \in (\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{C}))^2$ où I est un segment, $(a,b) \in I^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

1) **Linéarité**. $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.

2) **Relation de Chasles**. Si $c \in I$ alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

3) **Majoration en module**. Si $a \leqslant b$, $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

IV Intégrale et primitive d'une fonction continue

IV.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème (Existence de primitives d'une fonction continue)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Plus précisément, soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle et $a \in I$.

1) L'application $\begin{array}{rccl} F: & I & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et est **une primitive** de f sur I.

2) Pour tout $C \in \mathbb{K}$, il existe une et une seule primitive F de f sur I telle que $F(a) = C$.
F est définie par:
$$\forall x \in I, \quad F(x) = C + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques (Et si f n'est pas continue?)

- Il existe des fonctions non continues qui n'admettent pas de primitive.
  Contre-exemple : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\cup]1,2]1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.
- Une fonction non continue peut tout de même admettre des primitives.
  Exemple : $f(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle, $(a,b) \in I^2$ et F **une** primitive quelconque de f sur I. Alors:
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

☞ **Explication** ☜ Ce théorème est fondamental car il établit le lien entre l'intégrale vue comme une aire avec une primitive.

Exemples Calculer les intégrales

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t.$ 2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t.$

Corollaire

Soient $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$, alors : $\quad \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Étude de $\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$)**

Pour ces études de fonction il est en général hors de question de calculer l'intégrale, souvent impossible. On suppose f continue sur un **intervalle** I.

1) Pour déterminer $\mathcal{D}_\varphi$, on cherche les valeurs de x telles que $(u(x), v(x)) \in I^2$ (importance que I soit un intervalle).

2) Pour l'étude de la régularité (continuité, dérivabilité, classe), on pose F une primitive de f sur I et on écrit :
$$\varphi(x) = F(u(x)) - F(v(x)).$$
On utilise alors les opérations composition et différence.

3) Pour calculer les limites, on majore/minore/encadre et on utilise les théorème d'existence de limite de majoration/minoration/encadrement.

Exercice. On pose $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$

1) Déterminer l'ensemble de définition de φ.

2) Étudier la classe de φ sur l'ensemble de définition et calculer $\varphi'(x)$.

3) Calculer la limite de φ en 0 puis déterminer un équivalent de $\varphi(x)$ en 0.

V Sommes de Riemann

Théorème (Sommes de Riemann)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la subdivision régulière de f :
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$
On pose **la sommes de Riemann**
$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

- Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si de plus $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors
$$\left| R_n(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{C}{n} \qquad \text{où} \qquad C = \frac{(b-a)^2}{2}\sup_{[a,b]} |f'|.$$

✎ Méthode pratique ✎ (Calculer une limite d'une somme reconnue comme somme de Riemann)

On peut toujours se ramener au cas où $a = 0$ et $b = 1$, on écrit alors la somme sous la forme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où f est continue par morceaux, puis on utilise

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le résultat reste vrai si la plage d'indices va de 1 à n, de 0 à n, en se ramenant à la somme

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice.

1) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

3) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+k^2}$.

VI Formules de Taylor

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle et $a \in I$. Alors:

$$\forall x \in I, \ \ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{Polynôme en } x \text{ de degré } p} + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(p+1)}(t)}{p!}(x-t)^p\,\mathrm{d}t}_{\text{Reste intégral}}.$$

Cette relation est appelée **formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p en a**.

Remarques (Se souvenir de cette formule)

On remarquera l'analogie avec les deux formules de Taylor déjà rencontrées : formule de Taylor-Young, formule de Taylor sur les polynômes.
Pas de difficulté donc pour retenir la partie polynomiale de cette formule.
Pour retenir l'expression du reste intégral, remarquer que la formule de Taylor avec reste intégral généralise la formule déja connue : $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ qui est la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 0. Par analogie on retrouve le reste intégral du cas général.

Corollaire (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle et $(a, b) \in I^2$. Alors:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{[a,b]([b,a])} |f^{(p+1)}|.$$

Exercice.

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.

Corollaire (Formule de Taylor-Young)

- Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $a \in I$. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$

  Cette formule est appelée **formule de Taylor-Young de f au voisinage de a à l'ordre n.** On peut la réécrire au voisinage de 0:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}\left(h^n\right).$$

- Conséquence : si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I alors f admet un DL à tout ordre au voisinage de a.

Remarques (Local Vs Global)

- La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange donne une information **globale** sur f, au sens, où l'égalité est vérifiée **pour tout** $x \in I$. Cette égalité permet de remplacer $f(x)$ par une expression qui dépend des dérivées de f, et permet par exemple d'effectuer des majoration, minoration, encadrement.

- La formule de Taylor-Young donne une information **locale** sur f, au sens, où l'égalité est vérifiée **pour x au voisinage de a.** Cette égalité fournir un DL au voisinage de a et permet, par exemple, le calcul de limites, d'équivalents. **On ne s'en sert pas pour obtenir une inégalité pour tout $x \in I$.**