Chapitre
Espace vectoriel de dimension finie

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Dimension d'un espace vectoriel

Définition (Espace vectoriel de dimension finie)

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie si E possède une famille génératrice finie.

Exemples $\mathbb{K}^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et $\mathbb{K}_n[X]$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie car on en connaît une famille génératrice finie (la base canonique).

I.1 Base d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème (Théorème de la base extraite)

Soit E un K-ev différent de $\{0_E\}$ de dimension finie.
De toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base de E.

Exemples Dans $\mathbb{R}^3$. Soit $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (2, 0, 3)$, $u_3 = (0, 1, 1)$, $u_4 = (2, 1, 0)$. On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, on peut alors extraire de (u_1, u_2, u_3, u_4) une base de F.

Corollaire (Existence de bases)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev différent de $\{0_E\}$, de dimension finie. Alors E possède une base.
NB : si $E = \{0_E\}$ alors E n'a pas de base.

Théorème (Théorème de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev différent de $\{0_E\}$ de dimension finie.
Toute famille libre finie de E peut-être complétée en une base de E.

Exemples Dans $\mathbb{R}^3$. On pose $u_1 = (1, 2, 3)$. On peut compléter (u_1) en une base de $\mathbb{R}^3$.

I.2 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Lemme

Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs (au moins) est liée.
Par contraposée, dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille libre possède au plus n vecteurs.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment prouver qu'un espace vectoriel n'est pas de dimension finie)

On exhibe une famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Exemples Les espaces vectoriels $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ne sont pas de dimension finie.

Théorème-Définition (Dimension d'un espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si $E \neq \{0_E\}$, toutes les bases de E possèdent le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension** de E, notée $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou plus simplement $\dim E$ (s'il n'y a pas ambiguité).
- Si $E = \{0_E\}$, par convention $\dim E = 0$.

Exemples

1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} =$
2) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$
3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n =$
4) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dim \mathbb{K}_n[X] =$
5) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{np})(\mathbb{K}) =$
6) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + z = 0\}$, $\dim_{\mathbb{R}} E =$
7) Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in E$ avec $u \neq 0_E$, $F = \mathrm{Vect}(u)$ alors $\dim_K F =$
8) L'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension
9) L'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension

Corollaire (Nombre d'éléments d'une famille libre/génératrice)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$.

1) Toute famille libre de E possède au plus n éléments
2) Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.

Théorème (Caractérisation des bases)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B}$ une famille de $\boxed{n = \dim E \text{ vecteurs}}$. Alors:

$$\mathcal{B} \text{ base } \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ libre } \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ génératrice }.$$

✎ En pratique ✎ Si l'on connaît a priori la $\boxed{\text{dimension } n}$ d'un espace vectoriel et que l'on veut montrer qu'une famille donnée contenant $\boxed{n \text{ vecteurs}}$ est une base, il suffit de montrer que cette famille est ou bien libre, ou bien génératrice (libre est souvent plus simple).

Exemples

1) Montrer que $((1,1),(1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $((1,-1,1),(1,0,1),(0,-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Soit $(P_0,\ldots,P_n)$ une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_i = i$. Montrer que $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) La famille $((X-a)^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \right)$ est une base $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\varepsilon_1 = (1,0,\ldots,0), \varepsilon_2 = (1,1,0,\ldots,0), \ldots, \varepsilon_n = (1,1,1,\ldots,1).$$

Montrer que $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Théorème (Dimension de $E\times F$)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie alors

$$\dim(E\times F) = \dim E + \dim F.$$

II Sous-espaces vectoriels et dimension

II.1 Dimension d'un sev

Théorème (Dimension d'un s.e.v. de dimension finie)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

- F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
- De plus, si $\dim E = \dim F$ alors $F = E$.

✎ **En pratique** ✎ Le deuxième résultat est parfois utilisé pour prouver l'égalité d'espaces vectoriels. Si l'on sait qu'ils ont même dimension alors une inclusion suffit à prouver l'égalité.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ où $u = (1,1,0)$ et $v = (2,-1,\lambda)$ et $G = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y - 2z = 0$. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F = G$.

Remarques (Droites/plan/hyperplan)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de F.

- Si $\dim F = 1$ alors F est une droite vectorielle.
- Si $\dim F = 2$ alors F est un plan vectoriel.
- Si $\dim F = n-1$ alors F est un hyperplan vectoriel.

II.2 Somme de sous-espaces vectoriels et dimension

Théorème (Caractérisation des supplémentaires par base adaptée)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F et G deux sev de E de bases respectives $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$, alors

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G \text{ est une base de } E.$$

✎ Méthode pratique ✎ (Comment prouver que deux sev sont supplémentaires)

Pour montrer que F et G sont deux sev supplémentaires dans E, on montre que la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de E.

Exercice. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on pose $F = \text{Vect}(1, X^2 - 3X + 1)$ et $G = \text{Vect}(3X - 4, X^3 - 2X^2 - 5X + 4)$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.

Corollaire (Existence de supplémentaires)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors:

- F admet au moins supplémentaire dans E.
- De plus tous les supplémentaires de F sont de dimension $\dim E - \dim F$. On retiendra si $F \oplus G = E$ alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

Remarques (Dimension des hyperplans)

On comprend pourquoi les hyperplans d'un ev de dimension n sont de dimension $n - 1$.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment déterminer un supplémentaire de F)

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un sev de E de base $\mathcal{B}_F$. On détermine un supplémentaire de F dans E en complétant la base $\mathcal{B}_F$ en une base de E. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs qui complètent. Alors $F \oplus G = E$.

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $F = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0, -1)$ et $v = (0, 1, 2, 0)$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

2) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on pose $F = \text{Vect}(X^3 - 3X + 4, 2X^3 - 4X^2 + 1)$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Théorème ($\dim(F + G)$: formule de Grassmann)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E **de dimension finie**. Alors $F + G$ est de dimension finie et

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

Exercice. Soit E un ev de dimension 3 et F, G deux plan vectoriels de E non confondus. Montrer que $F + G = E$.

Corollaire (Caractérisation des supplémentaires)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F + G = E \end{cases}.$$

✎ Méthode pratique ✎ (Comment prouver que deux sev sont supplémentaires)

En dimension finie, pour montrer que F et G sont deux sev supplémentaires dans E. On montre que :

- $\dim F + \dim G = \dim E$ (souvent facile à obtenir car on connaît la dimension de E, F et G)
- au choix $F \cap G = \{0_E\}$ ou $F + G = E$ (le plus souvent $F \cap G = \{0_E\}$).

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((2, 1, -1))$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

II.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie) et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On appelle **rang** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $(u_1, \dots, u_n)$ noté

$$\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

Exemples

1) Dans $\mathbb{R}^2$, soient $u_1 = (1, 2), u_2 = (2, -3), u_3 = (-1, 4), u_4 = (-3, -6)$. Alors

$\mathrm{rg}(u_1) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(u_1, u_2) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(u_1, u_4) =$

2) Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (2, 0, 3), u_3 = (0, 1, 0), u_4 = (0, 4, -5)$. Alors

$\mathrm{rg}(u_1) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(u_1, u_2) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_4) =$

Théorème (Propriétés du rang)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

1) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{F})$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim E$.

2) **Caractérisation des familles libres/génératrices avec le rang** :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ libre} \qquad \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim E \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ engendre } E.$$

3) **Caractérisation des bases avec le rang** :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim E.$$

Définition (Rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le **rang** de A, noté $\text{rg}(A)$ est le rang de la famille des vecteurs-colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ i.e.

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p) \qquad \text{où } A = \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \dots \middle| C_p \right).$$

Propriétés (sur le rang d'une matrice)

1) Le rang d'une matrice échelonnée par colonnes est égale au nombre de colonnes non nulles.
2) On ne modifie pas le rang d'une matrice en effectue une opération élémentaire sur les colonnes (échange, dilatation, transvection).

✎ Méthode pratique ✎ (Comment calculer le rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour calculer $\text{rg}\, A$.
Quelques trucs pour aller vite :

- si la matrice est échelonnée par colonnes le rang est égal au nombre de colonnes non nulles
- si une colonne est combinaison linéaire des autres colonnes on peut la retirer dans le calcul de rang
- si la matrice ne comporte que deux colonnes non proportionnelles alors le rang vaut 2

Sinon, la méthode systématique qui doit être appliquée :

- ► on échelonne A par colonnes.
- ► le rang de A est alors le nombre de colonnes non nulles de la matrice échelonnée.

Exercice. Calculer le rang des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Théorème (Rang d'une famille = rang d'une matrice)

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie de base $\mathcal{B}$ et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E. On note C_i la matrice des coordonnées de u_i dans la base $\mathcal{B}$ aalors

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \text{rg} \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \dots \middle| C_p \right).$$

NB: se démontre dans la partie suivante.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs)

- ► On pose la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs **dans une base bien choisie**.
- ► On calcule le rang de cette matrice.

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (1,-1,2)$, $u_2 = (2,0,3)$, $u_3 = (1,2,3)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (à l'aide du rang).

2) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = X^2 - 2X + 3$, $P_2 = 3X + 4$, $P_3 = 2X^2 - 4X + 5$, $P_4 = X^2 - 1$. Calculer $\mathrm{rg}(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

III Applications linéaire en dimension finie

III.1 Injectivité, surjectivité, bijectivité et dimension

Théorème (Comparaison de dimensions)

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1) f est injectif $\Rightarrow \dim E \leqslant \dim F$ ou contraposée : $\dim E > \dim F \Rightarrow$ f non injective.

2) f est surjectif $\Rightarrow \dim E \geqslant \dim F$ ou contraposée : $\dim E < \dim F \Rightarrow f$ non surjective.

3) f est bijectif $\Rightarrow \dim E = \dim F$ ou contraposée : $\dim E \neq \dim F \Rightarrow f$ non bijective

✎ **En pratique** ✎ Ce théorème fournit un moyen rapide de prouver, dans certains cas qu'une application n'est pas injective/surjective/bijective.
Par exemple :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+2z, 2x-3z) \end{array} \text{ n'est pas} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P'(1), P''(0)) \end{array} \text{ n'est pas}$$

Théorème-Définition (Ev isomorphes)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

- E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$.
- E et F sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension.

☞ **Explication** ☜ Dire que les espaces E et F sont isomorphes ne signifie pas qu'ils sont identiques mais d'une certaine manière ils sont similaires, ils ont même structure. Par exemple, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}$ et $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ sont isomorphes à $\mathbb{R}^2$: ce sont des plans vectoriels. Le fait qu'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et un vecteur de $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ aient deux coordonnées dans une base donnée permet de dire qu'ils sont similaires.

⚠ **Attention** ⚠ E et F isomorphes ne signifie pas que tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, cela signifie qu'**il existe** $f \in \mathcal{L}(E, F)$ qui soit bijectif.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Comment déterminer la dimension d'un ev)**

Pour déterminer la dimension d'un ev F, on montre que F est isomorphe à un espace vectoriel E.
On détermine donc un ev E et un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim E = \dim F$.

Exercice.

1) Montrer que l'ensemble-solution d'une équation différentielle (E) $ay'' + by' + c = 0$ où $(a, b, c) \in K^3$ $(a \neq 0)$ est un ev de dimension 2.
On considèrera l'application $F : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_(E) & \to & \\ y & \mapsto & \end{array}$

2) Montrer que l'ensemble des suites u vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un ev de dimension 2.
On considèrera l'application $\begin{array}{cccc} F : & \mathcal{S}_(E) & \to & \\ & u & \mapsto & \end{array}$

Et on peut démontrer les résultats suivants.

Théorème (Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie avec

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F.$$

Théorème (Rang d'une famille = rang d'une matrice)

Cf. section II.3 : rang d'une famille de vecteurs.

III.2 Rang d'une application linéaire

Théorème-Définition (Application de rang fini)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On dit que f est de **rang fini** lorsque $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et on définit le **rang** de f comme la dimension de l'image de f noté

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Cas particulier :

- si E est de dimension finie alors f est de rang fini
- si F est de dimension finie alors f est de rang fini

Théorème (Propriétés du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Supposons que $\boxed{E \text{ est de dimension finie}}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors:

$$\underbrace{\operatorname{rg} f}_{\text{rang d'une application linéaire}} = \underbrace{\operatorname{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n))}_{\text{rang d'une famille de vecteurs}}.$$

2) Si E et F sont de dimension finie alors : $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$ $\qquad$ $\operatorname{rg} f \leqslant \dim F$.

Théorème (Conservation du rang par composition)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension quelconque et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1) Si g est injective et f de rang fini alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$
2) Si f est surjective et g de rang fini alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)$.
3) Conséquence :
on ne modifie pas le rang d'une application lorsqu'on la compose par un isomorphisme.

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\boxed{E \text{ de dimension finie}}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

1) f définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E sur $\operatorname{Im} f$

2) $\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f \text{ c'est-à-dire } \operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f}$.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment déterminer (efficacement) $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ en utilisant le th. du rang)

Cette méthode est efficace si la dimension du noyau est petite 1,2,3.... Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont des $\mathbb{K}$-ev de de dimension finie.

- On déterminer d'abord une base de $\operatorname{Im} f$, à l'aide de $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et d'une simplification.
- On détermine la dimension de $\operatorname{Ker} f$ à l'aide du théorème du rang.
- On détermine enfin autant de vecteurs du noyau, formant une famille libre, que sa dimension du noyau. Cette famille de vecteurs est alors une base du noyau.

⚠ **Attention** ⚠ Ne pas oublier l'hypothèse E de dimension finie.

Exercice.

1) Déterminer une base de l'image et une base du noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, 2x+y+z, -3y+z) \end{array}$.

2) Déterminer une base de l'image et une base du noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \operatorname{Re}(z) \end{array}$, $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-e.v.

3) Déterminer une base de l'image et une base du noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$.

Théorème (Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité à l'aide du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors:

1) f est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim F$

2) f est injective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim E$

3) f est bijective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim E = \dim F$.

Corollaire (Caractérisation des isomorphismes en dimension finie)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On suppose $\boxed{\dim E = \dim F}$, alors

$$f \text{ bijective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \textbf{ ou } f \text{ injective }.$$

Exercice

III.3 Endomorphismes en dimension finie

Théorème (Caractérisation des automorphismes en dimension finie)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$f \text{ bijective } \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim E \Leftrightarrow f \text{ surjective } \textbf{ ou } f \text{ injective }.$$

⚠ **Attention** ⚠ Le résultat "bijectif $\Leftrightarrow$ surjectif ou injectif" est faux pour un endormorphime en dimension quelconque.
Contre-exemples :

- $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ surjective sans être bijective
- $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & g : \text{la primitive de } f \text{ qui s'annule en } 0 \end{array}$ injective sans être bijective.

Exercice.

1) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, 2x+y+z, y) \end{array}$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$
2) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel $P' + P = Q$.

Définition (Éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension quelconque). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- f est inversible à droite (resp. à gauche) s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ (resp. $g \circ f = \mathrm{Id}_E$).
- f est inversible si f est inversible à droite et à gauche. **Attention** : ce n'est pas forcément le même g à droite et à gauche.

Remarques (Lien entre inversibilité à gauche/droite, inversibilité (au sens lci) et bijectivité)

L'inversibilité à gauche et à droite équivaut à l'inversibilité (au sens lci) et bijectivité de f. En effet :

⚠ **Attention** ⚠ Un endomorphisme peut être inversible à droite sans être inversible à gauche et vice versa, comme le montre l'exemple suivant.
Contre-exemple :

Mais en dimension finie il y a équivalence

Théorème (Caractérisation de l'inversibilité en dimension finie)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\boxed{\text{de dimension finie}}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$f \text{ inversible } \Leftrightarrow f \text{ inversible à droite } \Leftrightarrow f \text{ inversible à gauche} \Leftrightarrow f \text{ bijective}.$$

III.4 Formes linéaires en dimension finie

Pour mémoire une forme **forme linéaire** sur un $\mathbb{K}$-ev E est une application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$.

$\operatorname{Im} f \subset$ donc $\operatorname{Im} f =$ donc $\dim \operatorname{Im} f =$ donc $\dim \operatorname{Ker} f =$

Théorème (Formes coordonnées d'une application linéaire relativement à une base)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On suppose F de dimension finie, de base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.
Alors, il existe n formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ telles que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \varphi_1(x)\varepsilon_1 + \cdots + \varphi_1(x)\varepsilon_n.$$

Pour tout $x \in E$, $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{C}$.
Les formes linéaires φ_i sont appelées les **formes coordonées de f relativement à la base $\mathcal{C}$**.

Théorème (Caractérisation des hyperplans en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
On note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans cette base.

1) H est un hyperplan de E si et seulement si H admet une équation cartésienne de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \qquad \text{où} \qquad (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n.$$

2) H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim H = n - 1$.

Exemples

1) L'ensemble $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 3x + 2y = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$.
2) L'ensemble $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - 5y - z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$
3) Plus généralement, tout ensemble de la forme $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Exercice. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Théorème (Intersection d'hyperplans)

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Si $H_1, \ldots, H_m$ sont m hyperplans de E alors : $n - m \leqslant \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_m) \leqslant n - 1$.
2) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.